現代数学レクチャーズ B―10

赤 攝也 監修

公理的集合論

田中尚夫 著

培風館

現代数学レクチャーズ

刊行に際して

今や数学は，理工系の各分野のみならず，文科系の各分野はもちろん，広く政治・経済・企業経営等の実務の面においても，必要欠くべからざる道具となってきている．およそ，物を合理的・科学的に考えようとする場合には，数学，あるいは数学的な考え方を無視することはゆるされない．“数学は語学である”といわれる所以である．

また，最近の数学自身の進歩，ならびに数学と関連の深い電子計算機の社会への浸透にもいちじるしいものがある．

このような事情から，当然のことながら多くの数学書が出版されるようになり，その中には，すでに高い声価を得ているものも少なくない．

しかしながら，数学になれない人達，とくに高校生，教師，文科系の大学生，文科系出身の実務家などからは，よりわかりやすい書物の刊行に対する要望が多いのである．

また，さらに高度の数学を習得しようとする数物系・理工系の人達からは，より適切，かつより親切な入門書を求める声が高い．

このことは，すでに刊行されている数学書だけでは，埋めることのできない多くの空白があることを示すものである．

では，この空白を埋めるのにはどうしたらよいか．

およそ，数学を勉強していく場合には，いろいろの段階で“入門”をする必要がある．したがって，われわれは，まず，その“いろいろの段階”なるものを組織的に整理してみなければならない．そして，それぞれの段階にふさわしい入門書を注意深くつくって提供していかなければならない．そうすることによって，はじめて上のような空白を埋めることができるであろう．

この「現代数学レクチャーズ」は，以上のような見地に立って企画されたシリーズに他ならない．

われわれは，この趣旨を最大限に生かすため，シリーズ全体を次の 4 群に分ける：

A 群: 大学教養課程学生・教育系学生, 小・中・高教師, 高校生, 一般人を対象とする入門書群

B 群: 数物系の大学生向けの入門書群

C 群: 理工系・医薬系の大学生, 技術者, 研究者向けの入門書群

D 群: 法文経系の大学生, 実務家, 研究者向けの入門書群

また, "入門書"としてよりふさわしいものとするため, 次の措置をとる. すなわち, 記述の方式は, ひとりで読みすすむ人達の便宜をも考え, "講義式"を採用することとする. 解説は, つとめて具体に即するようにし, その発想の源を十分に理解できるようにする. 各章・節の冒頭には, それら章・節の要約をかかげ, その目的と意味とをあらかじめわかるようにすることを心掛ける.

さらに, 各節をできるだけ短い"小節"に区切り, 小節ごとに完全に理解できるようにする. 一般的にいっても, また勉強のために毎日十分な時間の得られない人達のことを考えても, 小刻みに要点を短時間でしっかり理解できるようにすることが望ましいと思うからである. また, このような構成は手早く前のことを復習するのにも役立つであろう.

われわれは, このシリーズの各分冊の書名, 内容のリストを慎重に整備すると同時に, すぐれた執筆者を得ることに力を注いだ. 幸い, 多くの方がこのシリーズの趣旨に御賛同下さり, 極めて強力な執筆陣を整えることができたことを心からうれしく思う. 執筆をお引き受け頂いた方々に深く感謝する次第である.

本シリーズが広い範囲の方々のお役に立つことを願ってやまない.

1977 年 10 月 10 日

赤　攝　也

まえがき

本書は，現代集合論の入門を詳しく記述することを目的として書かれた．今日，集合について記した書物は(一般の数学書の冒頭にある記述を含めると)数え切れない程あり，また集合(論)を標題に含む単行本も相当にある．しかしゲーデルの仕事に始まる現代集合論† を展開した邦書は極めて少ない． 筆者はかねてからこの部分を丁寧に解説した書物があればよいがと思っていたところ，本シリーズ監修者 立教大学教授 赤　攝也氏が公理的集合論の執筆をお勧め下さり，本シリーズに加えて下さるとのことで，渡りに舟と浅学非才を顧みずお引き受けした次第である．

御承知のように集合論はゲオルク・カントルによって19世紀後半に創始された壮大な理論である．紆余曲折を経たけれども，今日ではそれは数学の常識であり,殆どの数学が集合論にもとづいて建設されているといえる程になった．カントルは非常にゆるい条件の下で要素たちを集めたものを集合として認めたため逆理に陥ってしまった．ワイルはこのようなカントル流の直観的な立場の集合論をカントルのパラダイスと呼んだ．この楽園に安住することができれば大変幸福であろうが，その代償として非整合的システムを受け入れなければならなくなる．20世紀に入って間もなくツェルメロはカントルのパラダイスを逆理から解放すべく，集合論の公理化を提案した．これはヒルベルトの精神に多大の影響を受けた結果によるものと思われる．ヒルベルトはいわゆる形式的公理論の草分けである．ツェルメロの公理系は後にフレンケルによって補われ，ツェルメロ・フレンケル集合論体系として完成され，現代の殆どすべての数学をこの体系内で行うことが可能となり，今日それは最も標準的な集合論公理系として広く認められた数学的原理となった．

この公理系にもとづいて集合論がどのように展開できるか，それを実際に実行してみせるのが公理的集合論である．カントルが建設した諸概念，諸定理は

† ゲーデルの仕事は40年以上前のことで現在では古典に属するものであろう． したがってそれを現代集合論と呼ぶのはふさわしくないかも知れないが，彼が発見した構成的集合の世界 L は今日の集合論において中心的な役割を果しているので，‘現代’と呼んでも差支えないであろう．

すべてこの体系で定義され証明される．カントルが多大の努力を払って解決しようと試みた連続体問題も決定不能として，すなわちツェルメロ・フレンケル集合論体系では肯定も否定もできないという形で解決された．（この解決はZF体系が不十分なものであることを示唆するが，初等幾何学にユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学の両方が存在するのと同様に，やむを得ないことではなかろうか．しかし，将来非常に合理的な公理が見つかって，それから連続体仮説を導くことができるという可能性は——かなり小さいと考えられるが——否定することはできない．） また，一般の数学において時々‘選択公理の有無’や‘濃度’，他の集合論的公理などが関係する問題が考察されることがある．このような局面で現代の集合論はかなりの威力を発揮している．例えばすべての実数集合のルベーク可測性問題，ホワイトヘッド群の自由性問題，正規ムーア空間の距離化可能性問題などが挙げられよう．これらの問題の解決には現代集合論の基礎概念の理解が不可欠である．本書にはこれら基礎概念の多くのものを取り入れたつもりである．しかし実際の応用に向かうとなると，なおその間に埋めるべきギャップがあることは勿論である．

本書は広い範囲の人々に読んでいただけるよう，説明は丁寧にをモットーとした．また公理的集合論を展開するには述語論理の知識を必要とする．しかしこれを含めるとなると予定ページ数を大きく上まわることになるのでそれを避け，述語論理の記述は最小限にとどめ，専ら直観的に論理記号を使用することで間に合せた．数理論理学の成書は沢山出版されていて入手し易く，それはそれで別に学んでいただく方がよいと考えたからである．本書の構成は大きく分けると3つの部分から成っている．第0章は集合論の簡単な歴史である．第1章で公理にもとづかないいわゆる素朴集合論の概略を記した．これははなはだ中途半端なものであり無くもがなであるが，本書で始めて集合論に接する人もあるであろうということ，素朴集合論にはどこに欠陥があるのかを説明できること，逆理の解説を行うのに都合のよい場所であることなどの理由によって敢えてこれを含めることとした．第2章では公理系を提示しクラス概念を導入する．ここまでが第1部である．第2部は第3, 4章であってそこにはカントル集合論の核をなす順序数と基数の理論が述べてある．第5章以降は現代集合論と呼んでよいものであろう．初めに，モストウスキー同型定理，レヴィ階層，絶対性概念などの基本的ツールを解説した．これらは現代集合論を語る上で欠くことのできない基礎事項である．続いてゲーデルの構成的集合の理論へ進み，最終章でコーエンの強制法理論を詳述した．ここでの強制法はコーエンの原典

にはよっていない．コーヘンの発見した方法は分岐強制法と呼ばれ，ゲーデルの L の定義に密着していてかなり複雑なものであった．本書では代わりにソロベイらによって開発された非分岐強制法を用いたので，コーヘンの著書よりも理解し易くなっていると思う．なお，本文の中の処々に問をおいた．これは本文の論述から容易に導かれる練習問題や，直前の命題の証明（ストレートに証明できるもの）などが主である．章末には演習問題をいくつか載せた．その中には本文の補充の意味で加えたものもある．大部分の問や演習問題には解答をつけて読者の便宜を計った．

本書が機縁となって読者が集合論に親しみをもち，また愛好者や専門家が現われることになるならば，それは著者の望外の喜びであると言わなければならない．がさて，書き上げてみて余り満足のいく出来ではなかったと深く反省している次第である．不備の点も多々あると考えられるので，読者の皆さんから忌諱のない御批判をいただきたいと思う．

本書の出版に際し，赤教授には執筆の機会を与えて下さったことに感謝し御礼申し上げます．また筆者がイリノイ大学留学中，集合論について種々有益な御教示をいただいた竹内外史教授に御礼申し上げます．東海大学講師 安田 豊氏は原稿を読んで多くの有益な御注意を下さった．ここに感謝の意を表します．培風館編集部の牧野末喜氏と内海寿巳さんには色々お世話になったことに対し御礼申し上げます．特に内海さんには編集や校正に多大のお骨折りをいただき感謝しています．おしまいに著者を教え育んで下さった恩師 故近藤基吉先生にささやかながら本書を献げたいと思います．

1982年8月

著　者

目　　次

0

集 合 論

0.1 集合論の起り

集合論は，ゲオルグ・カントルによって創始された数学の一分科である．集合算そのものは，本質的にはブールらによってカントル以前にも考えられていたが，そしてそれはもちろん大変重要なものであるが，集合論の本質は無限の把握にあり，これこそカントルの独創になる極めて重要な貢献であった．カントルは最初，数論を研究していたが，就職したハレ(Halle)大学の数学教授ハイネの影響を受けて三角級数論の研究に移行した．図らずもそれが世紀の大発見を生むきっかけとなった．彼は三角級数による関数の表現の一意性問題の研究途上，実数に対する正確な定義の必要にせまられ，それに対しいわゆるカントルの定義を与え，さらに集積点，導集合の概念，超限数の概念へと進み([26]によると，［集合論についての第1論文が発表される前の］1870年に既に超限数の概念のアイデアが生れたという．)，ついで可算集合の概念，非可算集合の存在などを次々に発見し一般集合論を建設するに至った．(なお“可算(abzählbar)”という用語は，カントルがこの概念を発見してから10年を経て始めて用いられた．)

さて，カントル以前には“無限”は一通りにしか考えられていなかった．すなわち“限りなく増大する”ことを表わす無限大の概念である．あのガウスでさえ無限量を完結したものとして用いることに反対したという．カントルは無限そのものを実在するもの——**実無限**——としてとらえ，無限は多種多様であることを看破した．

集合とは一定のものの集りのことである．“もの”とはわれわれの思考の対象のことで，必ずしも物体という意味ではない．一般に集合概念の定義を述べ

ることはなかなかむずかしい！　それゆえここでは，創始者カントル自身の定義を示そう．それは Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Mathematische Annallen* Vol. 46 (1895) pp. 481–512 の最初のページに書かれている([27]).

Unter einer „*Menge*“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „*Elemente*“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.

“集合”とはわれわれの直観または思考の対象であって確定したよく区別しうるものたちmを一つの全体にまとめたものMのことであるとする(ここでmはMの“要素”と呼ばれる).

この定義は集合論誕生後20年を経て，始めて論文上に記述されたもので，それまでは定義はなく，集合に当る言葉も Inbegriff, Menge, Mannigfaltigkeit という単語が使われていた．しかし，カントル自身は上の定義のような集合概念を漠然といだいて議論を展開していたのであろう．

ともかく，彼の理論はその革命的思想のゆえに，当時の数学界になかなか容れられなかった．有名な数学雑誌 クレレ(Crelle, これは俗称である)へ投稿した第2論文(濃度の概念を提出，連続体問題も現われている)は，数年間出版を差し止められてしまった．それは時の編集委員クロネッカーの反対によるものといわれている．カントルは，出版の遅延にいらだち論文を取り下げようと思ったが，カントルの理解者デデキントの説得によってようやく思い止まったといういきさつがあった．以後，カントルはこの雑誌へ論文を投稿しなかった．([23], [26].) 反対者も多かったが，ワイエルシュトラスや上述のデデキントといった少数であるが優れた数学者がカントルの業績を高く評価したので彼も少しは救われたであろう．特にデデキントとは親交を結び，数学上のみならず人間的にも深い影響を受けたということである．なおカントルの悩みがいかに深刻であったかは，スウェーデンの数学者ミッタク・レフラーが苦悩するカントルから1年間に実に52通もの手紙を受け取ったというエピソード([23])から十分うかがい知ることができる．

優れた業績がいつまでも一般に評価されないでいることはない．カントルの集合論は次第に認められ，数学の中へ浸透して行った．今日では全数学が，その上に基礎づけられているといっても過言ではないであろう．カントルは極度に精神をすりへらせてしまったのであろう，晩年は精神病院にありそこで淋しく逝いたということである．

0.2 集合概念に対する反省

さて，カントルが集合論を展開していくうちに，カントル自身およびブラリ・フォルチ(1897)によって矛盾が発見されてしまった．それは集合概念を無造作に使い過ぎた結果であった．そこで集合とは何かをふり返ってみなければならなくなった．カントルがいう“確定したよく区別しうるものたち”とは一体何か．これは非常にむずかしい問題で今日に至るも明確な解決は得られていない．例えばすべての集合たちは確定したよく区別しうるものであろうか．もしそうならそれらをひとまとめにした全体は(カントルの定義によって)一つの集合でなければならぬ．しかしそのことから矛盾が導かれてしまう(**1.8** 参照)．もしそれらが確定したよく区別しうるものでないとするならば，何をもって“確定したよく区別しうるものたち”とするのかに対し明確に答えなければならない．そこで“すべての集合たちの集りのようなとてつもなく大きい集りは集合と認められない”という消極的規定をおいたとしよう．この場合，具体的に集りが示されればそれは集合であるとか，集合でないとか感覚的にいえることとが多いであろう．しかし一般的な集合概念の定義を与えることは至難である．ユークリッド幾何学において“点”とは何か，“直線”とは何かと問われてハッキリ返答できない事情に似ているところがある．しかし点や直線については，人は明確なイメージをもっているが，集合一般についてはそれ程明らかではないというところが相違している．集合は複雑，多様であいまいささえ入り込んでいるからであろう．カントルの超限概念の発見によっていくらでも異なった種類の集合を考えることができるのである．

そこで，ヒルベルト流の公理論によってみよう．御承知のようにユークリッド幾何学は公理論である．しかしそれは**内容的**公理論である．点とか直線に(多少あいまいながらも)定義が与えられ，それらは具体的内容(意味)をもって導入され，それらが満足することを要請される公理もそういうものだから信じて下さいという形で提供されている．これに対しヒルベルト流の公理論は，**形式的**公理論である．ヒルベルトでは点や直線には定義が与えられず，未定義術語として導入され，それらの働きが公理によって規定される．それゆえ，われわれがもっている直観的な点や直線**以外の**他の対象物が公理系を満足するならば，それらの対象物は集って一つの幾何学を構成するという見解である．その集りを公理系の**モデル**と呼ぶ．集合論についてもこのような形式的公理論を建設することができる．実はこれが本書の主題である．

公理化――それはそれでよい．しかし，公理では規定できないような直観的な集合というものはやはり存在するであろう．したがって公理化，形式化だけではわれわれは満足できない．だがこれ以外に，今のところうまい解決法は見当らないのである．しかも集合論の公理系が矛盾を含まないことを証明することができない．だから，かなり不満足なもの――これ以外にも不満な点があることが知られている――であるが，この公理系からは矛盾は生じないであろうという数学者の確信，および現在の殆どすべての数学をこの体系内で展開できるということなどによって，不本意ながらもこの形式的集合論体系（第2章を参照）を承認し，そこで集合論を展開しているというのが現状である．

0.3 その後の発展

カントル以後，集合論はどのように発展していったのであろうか．まず最初の大きな仕事は，カントルが予想した整列可能定理(**3.9** 参照)に対するツェルメロの証明であろう(1904年)．ツェルメロは友人の示唆によって今日のいわゆる**選択公理**(**2.6** 参照)にもとづいてこれを証明した．ところが，この選択公理の正否に関し直ちに当時のフランス新進数学者ボレル，ベール，ルベーグ，やや年長のアダマールらの間で激しい論争が行われ，選択公理に関する問題は集合論における中心問題の一つとなるに至った．この問題に一応の決着がつけられたのは1963年のことである．

次は，集合論に生じた矛盾を回避すべく，同じ著者ツェルメロによって提案された集合論に対する公理系の問題である(1908年)．彼の公理系は，集合論を展開するのに十分ではなかったのであるが，ともかく公理化を初めて提案したという功績は大きいといわねばならない．フレンケルはツェルメロの公理系を補充し今日の“ツェルメロ・フレンケル集合論”の公理系を完成した(1922年)．(公理系の整備にはスコーレム，フォン・ノイマン，ベルナイズらの貢献もある．)本書ではこれについて詳述し，その上で集合論を展開する．

第3は，ゲーデルの画期的業績の一つである選択公理と一般連続体仮説の無矛盾性証明である．これによって選択公理や一般連続体仮説を使用しても間違いは起らないことが保証され，特に選択公理を必要とする一般の数学にとってはまたとない福音となった．本書第6章で，このゲーデルの結果は詳しい証明と共に述べられている．

これに続く展開は，現代集合論である．大基数の存在を公理において，それ

からの実り多い結果が集積されつつあり，またコーヘンに始まる強制法の方法は選択公理，連続体仮説，構成可能性公理などの独立性を導いたのみならず，さまざまな応用を生んだ．現代集合論を語る上でなくてはならないこの強制法は，本書第 7 章で紹介される．これら以外の大きな話題の一つは，決定性公理である．しかし，これは記述集合論と密接な関係があり，記述集合論は本書で取り扱う余裕がないので，他の機会に譲ることにする．

1

素朴集合論の概略

初めて集合論を学ばれる読者のために，素朴集合論の一部を解説する．これは，公理にはよらない純直観的立場の集合論である．したがって，所々につまずきがある．そのことに触れながら欠陥は欠陥のまま残しておく．後章で，そこがどのようにして救済されるかがわかるであろう．また，逆理についても数学基礎論の側から解説を試みる．

1.1 集　　合

前章で述べたように，集合概念を正確に定義することはできないが，ここではカントルが与えたように“確定したよく区別しうるものたちを一つの全体にまとめたもの”を集合ということにする．この説明に現われた“もの”をその集合の**要素**または**元**といい，もの a が集合 A の要素であることを

$$a \in A$$

で表わす．これはすでになじみの記法であろう．$a \notin A$ は a が A の要素でないことを表わす．

例 1.　自然数（本書では 0 も自然数とする）は確定したよく区別しうる対象である．これらを一つの全体にまとめたものは集合である．これを

$$\omega$$

で表わす．▨

例 2.　3つの自然数 0, 1, 2 を一つの全体にまとめたものは集合である．これを

$$\{0, 1, 2\}$$

で表わす．一般に有限個の確定した対象物 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ を一つの全体にまとめると集合になる．これを

（1）
$$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$
で表わす．a だけを要素とする集合 $\{a\}$ を**1元-集合**という．その意味では(1)を n 元-集合と呼んでよい．▨

上の記法(1)は大変便利なので，$\cdots$ の意味が明確であれば，無限集合の場合にもこれを流用する．例1の ω は

（2）
$$\omega=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$
と表わす．これは曲りなりにも ω を定義しており，**要素を書き並べて**表わした定義である．実数全体の集合——これは集合と考えられる——は，要素を書き並べる表示をもたないことが後にわかるであろう†．そのような集合を定義するには概念的方法によらなければならない．

2つの集合 A，B が**等しい**とは，両者の要素たちが全く一致していることで，これを
$$A=B$$
で表わす．なお**本章**では大抵の場合，集合をローマ大文字で，要素をローマ小文字で表わすが例外もある．(例えば ω はその一例である．)もちろん，ローマ大文字が関係とか関数のような他のものを表わすこともある．また**他章**では，異なった記号法が用いられる．第2章以降は大体共通の記号法に統一されている．

集合 B の要素がすべて A の要素であるとき，B は A の**部分集合**であるといい
$$B\subseteq A \qquad \text{または} \qquad A\supseteq B$$
で表わす．この記号を使うと

定理 1.1.1　$A\subseteq B$ かつ $B\subseteq A$ ならば $A=B$ である．▨

便宜上，要素をもたない集合を考え，これを**空集合**といい ϕ で表わす．任意の集合 A について
$$\phi\subseteq A$$
であると考える．これは“ならば”のもつ真理値と合致する††．

つぎに，X を集合とし，$P(x)$ は X の要素 x についての性質とする(**単項述**

---

† (2)のような表現はせいぜい(後出の)可算集合に限る．“実数集合を $\{a, b, c, \cdots\}$ とせよ”などとかくことがないことはないが，それは実数集合の表示ではなく，いくつかの要素を代表として見せてみたに過ぎない．また(後述の)選択公理によって実数を並べたものは，一応要素を書き並べた表示であるが，われわれがここで意味しているのは並べ方が明確なもののことである．

†† 命題 $\underset{(\text{ならば})}{P\to Q}$ において，P が偽ならこの命題は真である．

語と呼ぶことがある）．$P(x)$ を満たす X の要素 x 全体の集合を

（3）　　　$$\{x|P(x)\}$$

で表わす．X を強調するときは(3)の代わりに $\{x\in X|P(x)\}$ とかく．この記法を一般化して，$Y\subseteq X$ のとき，$P(x)$ をみたす Y の要素 x 全体の集合を

$$\{x\in Y|P(x)\}$$

で表わす．

例 3.　X として ω をとり，$P(x)$ は"x は2で割り切れる"という性質であるとすれば，

$$\{x\in\omega|P(x)\}$$

は偶自然数全体の集合である．$Y(\subseteq\omega)$ が5の倍数の集合ならば，

$$\{x\in Y|P(x)\}$$

は10の倍数の集合にほかならない．▨

この記法は集合の**性質による表示**（**定義**）である．

1.2　論理記号と集合算

集合論を展開するに当って，これをいちいち普通の言葉で書き表わしていく方法では表現が冗長になり，また複雑な概念を言い表わすことが困難である．一般に数学の発展が，記号の巧妙な使用に負うところ大であることはいうまでもないことであろう．数学の対象が記号的な言葉で明確に記述されるように，数学論証に用いられる論理も記号的言葉の使用によってより明確に表わされ非常に有効である．特に集合概念は，論理と表裏一体の関係にあるのでなおさらのことである．ここでは形式的体系には触れないで——これは第2章で略述される——，上述の主旨すなわち日常使う論理の記述を記号的に（全面的にというわけではないが）行うにとどめる．

または（あるいは）	を	$\vee$
そして（かつ）	を	$\wedge$
ならば	を	$\rightarrow$
同値（必要十分）	を	$\leftrightarrow$
でない	を	$\neg$
すべての x について	を	$\forall x$
ある x が存在して	を	$\exists x$

で表わす．集合論を展開する場合，上の x のような変数は集合の要素を表わ

す．これらの記号と $x \in A$ のような関係式の組合せによって(適当なカッコの使用の下に)集合論の普通の概念はすべて表現することができる．

例 1. $A \subseteq B$ は

$$\forall x(x \in A \to x \in B)$$

として表現される．このことを

$$A \subseteq B \equiv \forall x(x \in A \to x \in B)$$

で表わす．ここで $\equiv$ は左辺を右辺の式で定義したことを表わす．$\equiv$ の代わりに $\leftrightarrow$ を用いても混乱の恐れはない．すなわち

$$A \subseteq B \longleftrightarrow \forall x(x \in A \to x \in B).$$

また

$$A = B \longleftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

である．▨

本書では A が B の**真部分集合**であることを $A \subset B$ または $A \subsetneq B$ で表わす：

$$A \subset B \longleftrightarrow A \subseteq B \wedge A \neq B.$$

しかし $A \subset B$ を $A \subseteq B$ の意味に用いているテキストも多いから，その点注意されたい．

以上の準備の下に集合算を導入しよう．

1°) 2つの集合 A, B の**和集合** $A \cup B$ は次式で定義される：

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

ここで $:=$ は左辺の集合を右辺によって定義したことを表わす．単に $=$ と書いても混乱は起らないので今後は $=$ のみを用いることにする．

2°) 2つの集合 A, B の**共通部分** $A \cap B$ は

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

3°) 2つの集合 A, B の**差** $A - B$ は

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

もし $B \subseteq A$ ならば，$A - B$ を **A に関する B の補集合**という．ある一つの集合 A 内だけで考えているときは，$A - B$ を単に $-B$ または B^c で表わし，B の**補集合**という．

4°) **空集合** ϕ（前出） これは次の関係をみたす：

$$\neg \exists x(x \in \phi) \quad \text{あるいは同等に} \quad \forall x(x \notin \phi).$$

5°) ある集合 Λ の各要素 λ に一つずつの集合 A_λ が対応しているとき(Λ を添数集合という)，これらの集合 A_λ の集合を

$$\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

で表わす．これらの**和集合**，**共通部分**はそれぞれ次のように定義される：

$$\bigcup\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}=\{x \mid \exists\lambda\in\Lambda(x\in A_\lambda)\}\ \ (=\bigcup_\lambda A_\lambda \text{ と略記する})$$

$$\bigcap\{A_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}=\{x \mid \forall\lambda\in\Lambda(x\in A_\lambda)\}\ \ (=\bigcap_\lambda A_\lambda \text{ と略記する}).$$

例 2． $\mathcal{R}$ を実数全体の集合とする．各自然数 n に対し集合

$$A_n=\left\{x\in\mathcal{R} \mid -\frac{1}{n+1}<x<1+\frac{1}{n+1}\right\}$$

が対応しているとき，

$$\bigcup\{A_n \mid n\in\omega\}=\{x\in\mathcal{R} \mid -1<x<2\}$$

$$\bigcap\{A_n \mid n\in\omega\}=\{x\in\mathcal{R} \mid 0\leqq x<1\}.$$

これらはそれぞれ $\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$, $\bigcap_{n=0}^{\infty}A_n$（あるいは $\bigcup_n A_n$, $\bigcap_n A_n$）などと略記される．▨

X を一つの集合とし，X の部分集合のみを考える．したがって集合 A に対し，$A\subseteq X$, $A^c=X-A$ である．このとき次の諸関係が成り立つ：

(1)　$A\subseteq B \to B^c\subseteq A^c$

(2)　$A^{cc}=A$

(3)　$A\cup B=B\cup A$　　$A\cap B=B\cap A$

(4)　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(5)　$A\cup(A\cap B)=A$　　$A\cap(A\cup B)=A$

(6)　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$　　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(7)　$A\cup A^c=X$　　$A\cap A^c=\phi$

(8)　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$　　$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

(9)　$(\bigcup_\lambda A_\lambda)^c=\bigcap_\lambda A_\lambda{}^c$　　$(\bigcap_\lambda A_\lambda)^c=\bigcup_\lambda A_\lambda{}^c$

(10)　$A\subseteq B \leftrightarrow A\cap B=A \leftrightarrow A\cup B=B.$

これらは図によってあるいは論理的に容易に確かめることができるから，それらのチェックは読者の演習問題とする．

なお，$A\cap B=\phi$ ならば，A, B は**互いに素**であるという．この概念は，今後しばしば現われるであろう．

問 1． (1)～(10)を証明せよ．

問 2． 次の関係式を証明せよ．

(i)　$A\subseteq B\wedge C\subseteq D \to A\cup C\subseteq B\cup D,\quad A\cap C\subseteq B\cap D.$

(ii)　$A\cap C=\phi \to A\cap(B\cup C)=A\cap B,\quad A-C=A.$

問 3． 空集合はただ一つしかないことを示せ．▨

1.3　関係と写像

x, y の**順序対**を $\langle x, y\rangle$ で表わす．2つの順序対の間の相等関係 $=$ は

$$\langle x, y\rangle=\langle x', y'\rangle \leftrightarrow x=x' \wedge y=y'$$

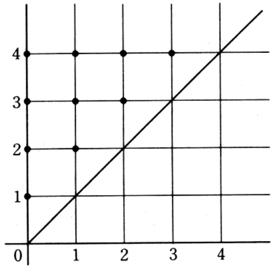
によって規定される．A, B を2つの集合とする．A と B の**直積** $A\times B$ は

$$A\times B=\{\langle x, y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B\}$$

で定義される．R が A 上の**関係**であるとは，R が $A\times A$ の部分集合であることをいう：$R\subseteq A\times A$.

例 1.　自然数の間の大小関係 $<$ は，次のような $\omega\times\omega$ の部分集合である：

$$\begin{aligned} < \;=\{&\langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 0, 3\rangle, \cdots \\ &\qquad\quad \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad \langle 2, 3\rangle, \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ddots \}\end{aligned}$$



$\omega\times\omega$ を上図のような格子点の集合とみるならば，$<$ は黒点からなる部分集合である．▨

R が A 上の関係のとき，$\langle x, y\rangle\in R$ を xRy と書き表わすことがある．例えば前例で $\langle 1, 3\rangle\in <$ を $1<3$ とかくのである．後者は，通常の記法にほかならない．また，R が $A\times B$ の部分集合のとき，これも一つの関係と呼んでよい．実際 R は，$A\cup B$ 上の関係だからである．よってこの場合は，R は $A\times B$ における関係と呼ぶことにしよう．あるいは **A と B の間の**(一つの)**関係**といってもよい．

集合 A の各要素に集合 B の一つの要素を対応させる対応 f が与えられてい

るとき，このことを

$$f: A \longrightarrow B$$

で表わし，f を A **から** B **への一意写像**または単に**写像**あるいは**関数**という．また A を f の**定義域**といい $\mathrm{dom}(f)$ で表わし，B を f の**値域**という．A の要素 a が f によって B の要素 b に移るならば，そのことを

$$f: a \longmapsto b \qquad \text{または} \qquad f(a)=b$$

で表わす．このとき b を写像 f による a の**像**，または a における関数 f の**値**といい，逆に a を f による b の**原像**または**逆像**という．定義によって a の像 b は一意的に定まるが，b の原像は一般に一つとは限らない．そこで b の原像の集合を

（1）　　$f^{-1}(\{b\})$ 　または略して　 $f^{-1}(b)$

で表わす．B のどの要素 b についても $f^{-1}(b)$ が高々 1 元-集合であるならば[†] f は A から B への **1 対 1 写像**または **単射**という．すなわち $a_1, a_2 \in A$ に対し，

$$a_1 \neq a_2 \rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

このとき

$$f: A \xrightarrow{1\text{-}1} B \qquad \text{または} \qquad f: A \longrightarrow B\ (\text{単射})$$

とかく．A_1 が A の部分集合のとき

$$f(A_1)=\{b \mid \exists a \in A_1(f(a)=b)\}=\{f(a) \mid a \in A_1\}$$

を A_1 の f による像という．特に $f(A)(\subseteq B)$ を f の**値集合**という[††]．もし

$$f(A)=B$$

が成り立つならば，f は A から B の**上への**写像または A から B への**全射**であるといい

$$f: A \xrightarrow[\text{onto}]{} B \qquad \text{または} \qquad f: A \longrightarrow B\ (\text{全射})$$

で表わす．全射かつ単射である写像は“1 対 1 かつ上への”写像または**全単射**（**双射**）と呼ばれ

$$f: A \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} B \qquad \text{または} \qquad f: A \longrightarrow B\ (\text{全単射})$$

で表わす．

一般に写像 $f: A \longrightarrow B$ に対し，

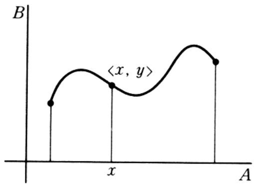
$$G(f)=\{\langle x, y\rangle \mid y=f(x) \wedge x \in A\}$$

---

† B の要素 b で，原像をもたないものがありうることに注意．

†† $f(A)$ を f の像または**像集合**と呼ぶこともある．

を f の**グラフ**という．これは $A\times B$ における一つの関係である．



定理 1.3.1 $f: A \longrightarrow B$ とする．このとき

1°) $A_1\subseteq A_2\subseteq A$ ならば $f(A_1)\subseteq f(A_2)$

2°) $A_1, A_2\subseteq A$ ならば

$$f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2), \qquad f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$$

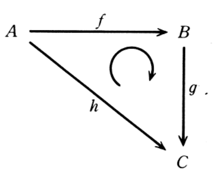
証明 容易であるから読者の演習にゆだねる．▨

なお，$f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$ は必ずしもいえない．反例は，$f: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, $f(x)=x^2$ とする．ここに $\mathcal{R}$ は実数全体の集合を表わす．$A_1=$区間 $(-1, 0)$, $A_2=(0, 1)$ とすれば，$f(A_1\cap A_2)=\phi$ であるが，$f(A_1)\cap f(A_2)=(0, 1)$ である．しかし f が単射なら等号が成立する．証明も容易にできるであろう．

次に2つの写像 $f: A \longrightarrow B$, $g: B_1 \longrightarrow C$ を考える．もし $B_1\subseteq f(A)$ ならば，各 $a\in A$ に対し

$$h(a)=g(f(a))$$

とすれば，$h: A \longrightarrow C$ なる写像 h が定義される．h を f と g の**合成写像**といい，$g\circ f$ で表わす．この状況を次の**ダイヤグラム**で表示する：



$h=g\circ f$ （この性質をダイヤグラムが**可換**であると言い表わす.）

3つ以上の写像の合成も同様に定義され，そのとき合成演算 $\circ$ は結合法則を満足することがわかる：

$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

よって写像の集合 $\{f|f: A \longrightarrow A\}$ は演算 $\circ$ に関し**半群**をなす．特に恒等写像

$$i_A(a)=a, \qquad a \in A$$

はこの半群の単位元である．

今度は，$f: A \longrightarrow B$ に対し $B_1 \subseteq B$ が与えられるとき，

$$f^{-1}(B_1)=\{a \in A \mid f(a) \in B_1\}$$

を B_1 の f による**逆像**という．これは(1)の最初の記法とマッチしている．

定理 1.3.2　$f: A \longrightarrow B$ とする．

1°）　$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B$　ならば　$f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$

2°）　$B_1, B_2 \subseteq B$　ならば

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2)=f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \qquad f^{-1}(B_1 \cap B_2)=f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$$

3°）　さらに $g: B_1 \longrightarrow C$, $f(A)=B_1$ とする．このとき $C_1 \subseteq C$ に対し

$$(g \circ f)^{-1}(C_1)=(f^{-1} \circ g^{-1})(C_1)$$

4°）　$B_1 \subseteq B$　ならば　$f(f^{-1}(B_1))=B_1 \cap f(A)$

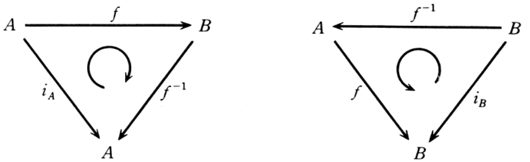
5°）　$f^{-1}(f(A_1)) \supseteq A_1$，ただし $A_1 \subseteq A$ とする．

証明　容易であるから演習問題とする．▨

$f: A \longrightarrow B$ が全単射ならば，**逆写像** $f^{-1}: B \longrightarrow A$ が

$$a=f^{-1}(b) \leftrightarrow f(a)=b$$

によって定義される．このとき $f^{-1} \circ f: A \longrightarrow A$ は恒等写像 i_A である．また $f \circ f^{-1}: B \longrightarrow B$ は恒等写像 i_B である．これをダイヤグラムで表わせば



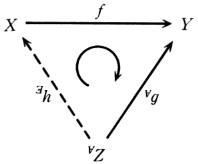
$i_A=f^{-1} \circ f$　　　　$i_B=f \circ f^{-1}$

全射，単射とダイヤグラムの間に面白い関係がある．

定理 1.3.3　$f: X \longrightarrow Y$ が全射であるための必要十分条件は

（2）　$\forall Z \forall g: Z \longrightarrow Y\ \exists h: Z \longrightarrow X\ [f \circ h=g]$

が成り立つこと，すなわち次のダイヤグラムが可換であることである：



$$f \circ h = g$$

証明 $f: X \longrightarrow Y$ が全射なら，$g: Z \longrightarrow Y$ なる任意の Z, g に対し次のようにして $h: Z \longrightarrow X$ をつくることができる：各 $z \in Z$ に対し

$$h(z) = f^{-1}(g(z)) \text{ の中の一つの要素 } x^{\dagger}$$

これに対し，$g(z) = f(x)$ であるから

$$(f \circ h)(z) = f(h(z)) = f(x) = g(z).$$

逆に，(2)が成り立てば，Z として Y をとり g として i_Y をとるとこれに対し

$$h: Y \longrightarrow X, \qquad f \circ h = i_Y$$

なる h が存在する．よって任意の $y \in Y$ に対し

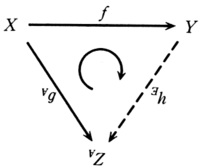
$$f(h(y)) = i_Y(y) = y, \qquad h(y) \in X$$

であるから，f は全射である．▨

定理 1.3.4 $f: X \longrightarrow Y$ が単射であるための必要十分条件は

(3) $\forall Z \forall g: X \longrightarrow Z\ \exists h: Y \longrightarrow Z\ [h \circ f = g]$

が成り立つこと，すなわち次のダイヤグラムが可換であることである：



$$h \circ f = g$$

証明 $f: X \longrightarrow Y$ が単射とせよ．$g: X \longrightarrow Z$ なる任意の Z, g をとる．z_0 を Z の任意の要素とし固定する．

$$h: Y \longrightarrow Z, \qquad h(y) = \begin{cases} g(f^{-1}(y)) & \textit{if} \quad y \in f(X) \\ z_0 & \textit{if} \quad y \in Y - f(X) \end{cases}$$

とすれば，f は単射なるゆえ $f^{-1}(y)$ は 1 元-集合．よって h の定義は合法的である．これに対し，$x \in X$ ならば

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = g(f^{-1}(f(x))) = g(x).$$

† このような一要素 x を一様にとり出すには，一般に後述の選択公理を必要とする．

逆に，(3)が成り立てば，$Z=X$, $g=i_X$ ととることによって

$$h: Y \longrightarrow X, \qquad h\circ f=i_X$$

なる h の存在がいえる．x, $x'\in X$ なる x, x' に対し $f(x)=f(x')$ とすれば

$$x=i_X(x)=h(f(x))=h(f(x'))=i_X(x')=x'.$$

よって f は単射である．▨

問 1. R, S が A と B の間の関係ならば，$R\cup S$, $R\cap S$ もそうである．

問 2. R が A と B の間の関係のとき，$R^{-1}=\{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle\in R\}$ と定義する．R^{-1} は B と A の間の関係である．このとき関係 $S=R\cup R^{-1}$ は対称法則をみたす：$xSy \to ySx$.

問 3. R, S が A と B の間の関係ならば

$$R^{-1}\cup S^{-1}=(R\cup S)^{-1}, \qquad R^{-1}\cap S^{-1}=(R\cap S)^{-1}.$$

問 4. 次の関係は関数(のグラフ)であるか．

1) $\{\langle x, y\rangle\in \mathcal{R}\times\mathcal{R} | x^2+y^2=1\}$, 2) $\{\langle x, y\rangle\in \mathcal{R}\times\mathcal{R} | x^2+y^2=1\wedge y\geqq 0\}$

ただし $\mathcal{R}$ は実数全体の集合を表わす．

問 5. $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ とする．1) $g\circ f$ が単射ならば，f は単射である．2) $g\circ f$ が全射ならば g は全射である．▨

1.4 べき集合とブール代数

集合 A の部分集合全体の集合を A の**べき(巾)集合**といい $\mathcal{P}(A)$ で表わす：

$$\mathcal{P}(A)=\{X | X\subseteq A\}.$$

例 1. $A=\{0, 1, 2\}$ ならば，$\mathcal{P}(A)=\{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$ である．▨

与えられた2つの集合 A, B に対し

$${}^{A}B=\{f | f: A \longrightarrow B\}$$

と定義する．特に $B=2=\{0, 1\}$ のときは

$${}^{A}2=\{f | f: A \longrightarrow \{0, 1\}\}.$$

各 $f\in {}^{A}2$ に対し $S_f=\{a\in A | f(a)=1\}$ によって S_f を定義すると，$S_f\subseteq A$. 逆に，任意の $S\subseteq A$ に対し

$$(1) \qquad f_S(a)=\begin{cases}1 & if \quad a\in S\\ 0 & if \quad a\in A-S\end{cases}$$

により f_S を定義すれば，$f_S\in {}^{A}2$ となる．f に対する S_f, S に対する f_S はどちらも一意的に定まるから，結局 ${}^{A}2$ と $\mathcal{P}(A)$ とは同概念の異なる表現とみることができる．よって $\mathcal{P}(A)$ の代わりに ${}^{A}2$ を用いることもある．A が n 個の要素からなる集合ならば，$\mathcal{P}(A)$ は丁度 2^n 個の要素からなる．この記

法を拡大解釈して利用したと思えばよい．なお(1)なる f_S を S の**特性関数**と呼んでいる．

定理 1.4.1 1°) $A \subseteq B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

2°) $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) \leftrightarrow A = B$.

3°) $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B) \to A \in B$.

証明 演習問題とする．▨

問 1. 次式を証明せよ：

1°) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$,　　2°) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

問 2. 次の集合は何か．要素を書き並べる方法で記述せよ：

1) $\mathcal{P}(\phi)$,　　2) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))$,　　3) $\mathcal{P}(\{0, 1\})$.

問 3. 1) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$ となる例を示せ．　2) $\mathcal{P}(A) \subseteq A$ とするとどんな不都合が生ずるか．▨

関数 $f: A \longrightarrow B$ が与えられると，f を自然に拡張して

$$f: {}^{A}2 \longrightarrow {}^{B}2$$

なる関数をつくることができる．それには，各 $X \subseteq A$ に対し

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

とすればよい．x と $\{x\}$ とを同一視すれば，新しい f は古い f の**拡張**になっている．これを f のべき集合への**拡張**という．

問 4. $f: A \longrightarrow B$ が全射［単射］ならば，f のべき集合への拡張はやはり全射［単射］である．▨

さて **1.2** でみたように（一つの集合のべき集合の要素間のいわゆる）集合算はいろいろな性質をもっていた．これらは大部分いわゆるブール代数の性質である．

定義 1.4.2 B を空でない集合とする．B の任意の2要素 a, b に対し，**結び**と呼ばれる B の要素 $a \cup b$，**交わり**と呼ばれる B の要素 $a \cap b$ が一意的に対応し，次の諸条件が満足されるならば，B は**ブール代数**であるという．

1°)	$a \cup b = b \cup a$	$a \cap b = b \cap a$	（交換法則）
2°)	$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$	$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$	（結合法則）
3°)	$a \cup (a \cap b) = a$	$a \cap (a \cup b) = a$	（吸収法則）
4°)	$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c)$	$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$	（分配法則）

5°) B は次の条件をみたす特別な2元 O, I をもつ．（最小元・最大元）

$$a \cup O = a \qquad a \cap I = a$$
$$a \cup I = I \qquad a \cap O = O$$

6°) B の各要素 a に対し

$$a \cup a' = I \qquad a \cap a' = O$$

をみたす B の要素 a' が存在する．a' を a の**補元**という（補元法則）．▨

例 2.　X を空でない集合とし，$B=\mathfrak{P}(X)$ とおく．B において $\cup$，$\cap$，$'$ をそれぞれ集合和，共通部分，X に関する補集合をとる演算とする．さらに $O=\phi$，$I=X$ とすれば，B はブール代数である．これを**集合代数**という．前述したように **1.2** の諸結果から，容易に確かめることができよう．▒

定理 1.4.3　ブール代数において

（a）　$a\cup a=a$，　$a\cap a=a$　　（べき等法則）

（b）　補元は一意的である：$a\cup b=I \wedge a\cap b=O \rightarrow b=a'$

（c）　O，I はそれぞれただ一つしかない．

（d）　$(a')'=a$

（e）　$(a\cup b)'=a'\cap b'$，　$(a\cap b)'=a'\cup b'$　　（ド・モルガンの法則）

（f）　$O'=I$，　$I'=O$.

証明　（a）　吸収法則によって $a\cap(a\cup b)=a$．この式の両辺へ左から $a\cup$ をほどこすと吸収法則を再び用いて $a=a\cup a$ が得られる．

（b）　$a\cup b=O$，　$a\cap b=I$　とすると，　$b=O\cup b=(a\cap a')\cup b=(a\cup b)\cap(a'\cup b)=I\cap(a'\cup b)=a'\cup b$，$a'=O\cup a'=(a\cap b)\cup a'=(a\cap a')\cap(b\cup a')=O\cap(b\cup a')=a'\cup b$．したがって $b=a'$．▒

問 5.　定理の(c)〜(f)を証明せよ．▒

ブール代数の公理 1°)〜6°)において，O と I を入れかえ同時に $\cup$ と $\cap$ を入れかえると各等式は横隣の等式に変わる．よって全体として不変である．したがって

定理 1.4.4　ブール代数の公理 1°)〜6°)から導かれる一つの命題において，O と I を入れかえ 同時に $\cup$ と $\cap$ を入れかえて得られる命題は，やはり 1°)〜6°)から結論される．▒

これを**双対の原理**という．例えば $(a\cup b)'=a'\cap b'$ が証明されると，$(a\cap b)'=a'\cup b'$ は自動的に成立するのである．

つぎにブール代数において

（2）　　$a\cup b=b$　　のとき　　$a\leq b$

と定義すると，$\leq$ はいわゆる**順序**の 3 条件をみたす：

1°)　$a\leq a$　　（反射法則）

2°)　$a\leq b \wedge b\leq a \rightarrow a=b$　　（反対称法則）

3°)　$a\leq b \wedge b\leq c \rightarrow a\leq c$　　（推移法則）．

証明は容易であるから読者の演習にゆだねる．

問 6.　$a\leq b \leftrightarrow a=a\cap b$ なることを証明せよ．▒

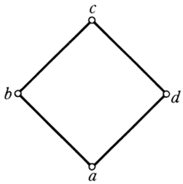
定理 1.4.5 ブール代数において I と O は $\leq$ の意味でそれぞれ最大，最小である．

証明 B を任意のブール代数とする．定義によってすべての $a \in B$ に対し $a \cup I = I$ であるから，すべての $a \in B$ について $a \leq I$. O についても同様である．▒

$a \leq b \wedge b \not\leq a$ のとき $a < b$ とかくことにする．$a \not\leq b$ かつ $b \not\leq a$ のとき a, b は**比較不可能**という．$a < b$ の場合 a を下に b を上にして図(i)のように線分で結び，$a < b < c$ のときは図(ii)のように図示する．b, d が比較不可能ならそれらは線分で結合しない．図(ii)はさらに $a < d < c$ でかつ b, d が比較不可能である場合の図である．このような図を(**ハッセ**)[†]**ダイヤグラム**という．



図(i)



図(ii)

問 7. ブール代数において b, d が比較不可能な 2 要素であるとする．そのとき $b \cap d < b < b \cup d$ かつ $b \cap d < d < b \cup d$ であることを示せ．したがってこの 4 つの要素は図(ii) のような**ダイヤモンド**を形成する．

問 8. $a \cup b$ は集合 $\{a, b\}$ の**最小上界** (l. u. b.) である．すなわち a, $b \leq a \cup b$ であり，しかも a, $b \leq x$ なら必ず $a \cup b \leq x$ である．$a \cap b$ は集合 $\{a, b\}$ の**最大下界** (g. l. b.) である．(最大下界の定義を述べよ．)

問 9. 1) 集合代数 $\mathcal{P}(X)$ においては(2)で定義される $\leq$ は包含関係 $\subseteq$ である．
2) 集合代数 $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ の(ハッセ)ダイヤグラムをかけ．▒

1.5 同 等 性

定義 1.5.1 2 つの集合 A, B があるとき，A から B の上への 1 対 1 対応が存在するならば，A と B は**同等**であるといい

$$A \sim B$$

で表わす．▒

---

† 現在では単にダイヤグラムと呼んでいるが，既に“ダイヤグラム”を別な所で使用しているので(ハッセ)を付加した．

ここで $A \sim B$ の場合，1対1の対応のさせ方はいろいろありうることに注意．明白に $\sim$ は**同値関係**の3条件をみたす：

1°) $A \sim A$ （反射法則）

2°) $A \sim B \to B \sim A$ （対称法則）

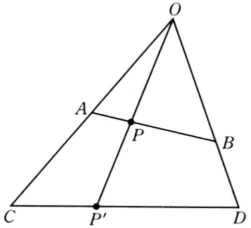
3°) $A \sim B \wedge B \sim C \to A \sim C$ （推移法則）†.

特に A, B が有限集合のときは，$A \sim B$ ならば A の要素の個数と B の要素の個数とは一致する．またその逆もいえる．このことは非常に大切な事実で，これによって“数える”ことなしに2つの集合の成員数を比較することができるのである．未開社会では家畜の数を記録するのに，1対1対応させた小石を集めることによってこれを行ったという．“計算する”の英語 calculate はラテン語の小石(calculus)という単語に由来する．スポーツなどの勝ち抜き戦(トーナメント)の試合数が参加チーム数より1だけ少ないことはよく知られている．試合数と負けチームとが1対1に対応するからである．

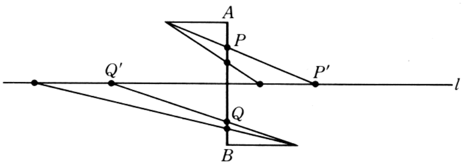
無限集合の場合にはどんな情況になるであろうか．無限集合を取り扱うと，有限集合のときには考えられなかった奇妙なことが起る．有限集合では，自分自身とその真の部分とが1対1に対応することはあり得ない．まさにそのことが，有限集合の要素の個数を決定したのであった．ところが無限集合では，実際にそのようなことが起る．例えば，自然数全体の集合 ω とその真部分集合である偶数全体の集合 E とは同等である．実際 $n \in \omega$ と $2n \in E$ とを対応させる対応は，ω から E の上への1対1対応である：$\omega \sim E$. ガリレイはこのことを知って悩んだ．そのことで無限の多様性が得られないと思ったからである．カントルは却って1対1対応という手段によって無限を解析し，ω と同等でない無限集合の発見(後述)によりガリレイを大きく乗り越え，これによって無限の多様性をあばきだしたのである．カントルは，同等な集合は**等しい個数**の要素をもつと考えた．前述のように $\sim$ は同値関係であるから $\sim$ に関してすべての集合たちを**類別**する(すなわち同等な集合たちをひとまとめにして類をつくる)ことができる．そうしてできた各同値類を**濃度**または**基数**という．(カントルは，もっとあいまいな感覚的な定義をしている．ここに述べたのは多分ラッセルの方法であろう．)これはものを数えることを一般化したものと考えられる．しかし上述の定義は各同値類がとてつもなく大きな集りで集合とはみなされないという欠陥をもつので修正を要する．正しい取り扱いは第4章にみられる．

† $\sim$ はすべての集合たちの上の“関係”であり，**1.3** で述べた集合上の関係より広い．このような“広い意味の関係”は第2章で(クラスとして)取り扱われる．

例 1. 任意の2つの開線分(閉線分)は同等である．図において点 P に P′ を対応させると，線分 AB と線分 CD の間に1対1の対応が得られる．▨



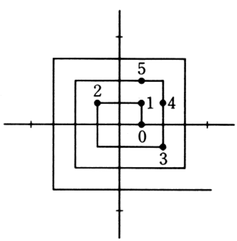
例 2. 開線分と全直線 l は同等である．図において，点 P と P′，点 Q と Q′ を対応させる対応は，開線分 AB と全直線 l との間の1対1対応を与える．▨



例 3. Q を有理数全体の集合とする．Q は ω と同等である．有理数は2つの整数 m, n の順序対 $\langle m, n\rangle$ として表わされる．ただし $m\neq 0$ とし

(1) $\langle m, n\rangle=\langle m', n'\rangle \leftrightarrow mn'=nm'$

と考える．$\langle m, n\rangle$ は平面上の格子点であるから，図のような順に自然数を対応させていけばよい．ただし $\langle m', n'\rangle$ の前に(1)をみたす $\langle m, n\rangle$ が既に現われていれば，それは省いて対応づけを行う．これによって $Q\sim\omega$ であることがわかる．▨



例 4.　実数全体の集合 $\mathcal{R}$ は ω と同等でない．これは後述する．▨

集合 A と同等な集合たちの同値類がつくる濃度を A の濃度といい $\bar{\bar{A}}$ または $|A|$ で表わす．A の濃度 $\bar{\bar{A}}$ 自身を取り扱うことは，前述のように欠陥が生じるので困難であるが，2 つの濃度 $\bar{\bar{A}}$, $\bar{\bar{B}}$ の比較は欠陥なく定義できる．

定義 1.5.2　集合 A から集合 B への 1 対 1 対応（すなわち単射）が存在するならば，A の濃度 $\bar{\bar{A}}$ は B の濃度 $\bar{\bar{B}}$ より小さいか等しいといい，$\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}}$ で表わす．（濃度の記号を用いず，これを 2 集合間の関係 $R(A, B)$ と考えると，p.20 の脚注†で述べた広い意味での関係として欠陥のない定義になっている.）また，$\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}}$ であるが $\bar{\bar{B}} \leq \bar{\bar{A}}$ ではないとき，$\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}}$ とかき，A の濃度は B の濃度より小さい，B の濃度は A の濃度より大きいという．▨

定義 1.5.3　$A \sim B$ のとき，$\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$ と定める．（これも **1.5.2** で説明したと同じ意味で欠陥をもたない定義になっている．すなわち $\bar{\bar{A}}$, $\bar{\bar{B}}$ を独立させない限り困難はないのである．）▨

上の 2 つの定義に現われる等号（ $\leq$ を“$<$ または $=$”とみている）の間に矛盾がないことは次の定理によって保証される：

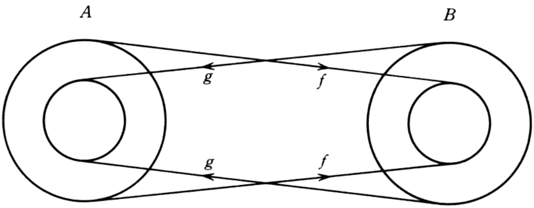
定理 1.5.4　（カントル－ベルンシュタインの定理）[†]

$$\bar{\bar{A}} \leq \bar{\bar{B}} \wedge \bar{\bar{B}} \leq \bar{\bar{A}} \ \rightarrow\ \bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}. \ ▨$$

この定理の前提は，図のように示すことができる．このような 2 つの単射 $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow A$ の存在から，

$$\textbf{全単射}\quad h: A \longrightarrow B$$

がつくれるというのが定理の主旨である．



証明　$f: A \xrightarrow{1-1} B$, $g: B \xrightarrow{1-1} A$ が与えられているとする．一般性を失

† カントルが発見し，シュレーダー，ベルンシュタインが独立に証明した．それゆえシュレーダー－ベルンシュタインの定理と呼んでいる本もある．ここでは普通に呼ばれているものを使った．

うことなく $f(A)\neq B$ かつ $g(B)\neq A$ としてよい．まず

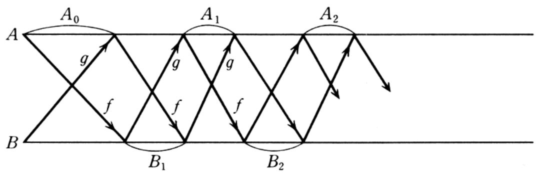
$$A_0=A-g(B)$$

とおくと，$\phi\neq A_0\subset A$．A_0 は単射 f によって，B の真部分集合 $f(A_0)$ へ移る．これを B_1 とすると，$\phi\neq B_1=f(A_0)\subset B$．次に，$B_1$ は g によって，$g(B)$ の真部分集合 $g(B_1)$ へ移る．これを A_1 とすると $\phi\neq A_1=g(B_1)\subset g(B)$．したがって $A_0\cap A_1=\phi$．さらに $B_2=f(A_1)$ とすれば，$\phi\neq B_2\subset B-B_1$ となる．これを続けると2つの集合列

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots;\ B_1,\ B_2,\ \cdots,\ B_n,\ \cdots$$

が得られ，これらは次の条件をみたしている：

$$\phi\neq B_n\subset B-(B_1\cup\cdots\cup B_{n-1}),\qquad \phi\neq A_n\subset A-(A_0\cup A_1\cup\cdots\cup A_{n-1})$$



よって，A_n たちは互いに素，B_n たちも互いに素である．そこで

$$M=A_0\cup A_1\cup A_2\cup\cdots$$

とおく．A と B の間の全単射 h は，次のように定義される：

$$h(a)=\begin{cases} f(a) & if\quad a\in M \\ g^{-1}(a) & if\quad a\in A-M. \end{cases}$$

$a\in A-M$ のときは $a\notin A_0$ であるから，$a=g(b)$ なる b が一意的に定まり上の定義は合法的である．この h が所要の条件をみたすことの証明は，読者の演習にゆだねる．▨

カントルーベルンシュタインの定理によって，$\leq$ が **1.4** の順序の3条件をみたすことがわかる．またこの定理のおかげで，“濃度が等しい”あるいは同じことであるが“同等である”という要求の証明が容易になることがしばしばある．一例をあげよう．

定理 1.5.5 I を実軸上の半開区間 $(0,\ 1]$ とする．平面上の集合としての正方形 $I\times I$ と I とは同等である(カントル1878年)．

証明 $f(x)=\langle x,\ 1\rangle$ は I から $I\times I$ への単射である．よって $\overline{\overline{I}}\leqq\overline{\overline{I\times I}}$．逆向きの不等式を証明するために各 $z\in I$ を無限小数で表わそう：

$$z=0.z_1z_2\cdots z_n\cdots$$

ただし，有限小数は無限小数に直しておく．すなわち，あるところから先がすべて0という表現を許さない．そこで $I\times I$ から任意に1要素 $\langle x, y\rangle$ をとり，x と y を上記のような制限の下に小数展開して

$$x=0.x_1x_2\cdots x_n\cdots,\qquad y=0.y_1y_2\cdots y_n\cdots$$

とする．これに対し無限小数

$$z=0.x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n\cdots$$

をつくれば，$z\in I$ であって対応 $f:\langle x, y\rangle\longmapsto z$ は1対1である[†]．ゆえに $\overline{\overline{I\times I}}\le\overline{\overline{I}}$. したがって**1.5.4**により $I\sim I\times I$. ▨

カントルはこの定理を発見し“次元の概念”が失われたと興奮してデデキントに知らせたところ，デデキントは冷静に判断し“1対1だけでなく両連続性をつけ加えなければ次元の概念は失われない”と正しく返答したという([25]).

問 1.　1)　$\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}\wedge\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{C}}\to\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{C}}$ を証明せよ．

2)　$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}\wedge\overline{\overline{B}}\le\overline{\overline{C}}\to\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{C}}$ を証明せよ．

問 2.　$A\cap C=\phi$, $B\cap D=\phi$ ならば　1)　$\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}\wedge\overline{\overline{C}}\le\overline{\overline{D}}\to\overline{\overline{A\cup C}}\le\overline{\overline{B\cup D}}$,

2)　$A\sim B\wedge C\sim D\to A\cup C\sim B\cup D$. ▨

1.6　可 算 集 合

定義 1.6.1　ω と同等な集合を**可算集合**という．これと有限集合を合せて**高々可算集合**という．高々可算集合でない集合を**非可算集合**という．▨

われわれは，未だ有限集合，無限集合の定義を述べなかったが，正確な定義は後章にゆずって，われわれが直観的に把握している有限，無限の概念に準拠することにする．

定理 1.6.2*　無限集合は必ず可算部分集合を含む．(*については後述．)

証明　M を無限集合とする．M から1要素 a_0 をとり出す．$M_1=M-\{a_0\}$ は無限集合であるからこれから1要素 a_1 をとり出すと $a_1\ne a_0$. さらに無限集合 $M_2=M_1-\{a_1\}$ から1要素 a_2 をとり出すと $a_2\ne a_0$, $a_2\ne a_1$. 以下この操作を続けると，M の異なる要素の無限列

(1)　　$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots$

が得られる．これをひとまとめにしたものを N とする．N は可算集合で，M に含まれる．▨

---

† この対応は全射ではない．例えば $z=0.11101010\cdots$ の f による原像は存在しない．なお，**1.5.4** によらない直接証明がある．

(1)をまとめたもの N が集合になるという主張は議論の余地あるところである．われわれは N が集合であると主張できる根拠をもっていない．これを保証するためには何らかの要請が必要である．この要請は，後章で論じられるいわゆる**選択公理**で支えられる．その一つの形は

選択公理　A が空でない集合ならば，A の任意の空でない部分集合 B に対し B の1要素 $f(B)$ を対応させる関数 $f\colon \mathscr{P}(A)-\{\phi\} \longrightarrow A$ が存在する．▨

集合論では厳密には関数も一つの集合として定義される．すなわちそのグラフ自身を関数と呼ぶのである．したがって上記のような f の存在はある種の集合の存在を保証しているわけである．この選択公理を用いると **1.6.2** は厳密に証明されるわけであるが，その際帰納法により定義される関数の存在問題が生ずる．（読者は実際に **1.6.2** の証明を試みられたい．）このことは，素朴な立場で容認されるものであるから差し支えない．しかしそのような議論をいちいち説明するのは厄介で，むしろ公理的集合論にゆずった方が得策である．よって，この定理の選択公理にもとづく証明は後章に述べることにする．

以下では(第1章だけ)選択公理は無意識的に用い，それが必要な結果に対しては＊印をつけるだけにしておく．

定理 1.6.3　可算集合の無限部分集合は可算集合である．

証明　M を可算集合とし，N を M の無限部分集合とする．$\omega \sim M$ であるから M の要素全体を

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \qquad (n \in \omega)$$

のように並べることができる．（このように“番号づけられる”という意味で1950年頃までは**可付番**という用語が使われていた．）さてこの中から N の要素を番号の小さい順に拾いあげると

$$a_{i_0},\ a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_n},\ \cdots$$

のように N の要素全体を並べて ω と1対1に対応づけることができる．よって N は可算集合である．▨

定理 1.6.4*　無限集合はそれ自身と同等な真部分集合を含む．

証明　M を無限集合とすれば，**1.6.2** によって M は可算部分集合を含むので，その一つを N とし

$$N=\{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$$

とおく．$M-N=A$ とすれば

$$M=A\cup\{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}.$$

いま

$$M_1 = A \cup \{b_0, b_2, b_4, \cdots, b_{2n}, \cdots\}$$

なる集合 M_1 をつくれば，M_1 は M の真部分集合である．

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{if} \quad x \in A \\ b_{2n} & \textit{if} \quad x = b_n \end{cases}$$

によって $f: M \longrightarrow M_1$ を定義すれば，f は全単射であるから $M \sim M_1$．▨

有限集合 F に対してはその真部分集合が F と同等になることはあり得ないので，**1.6.4** に述べた条件“自分自身と同等な真部分集合を含む”は無限集合を特徴づけるもので，特にこの性質をもつ集合は**デデキント無限**であるといわれる．選択公理を仮定すれば普通の意味での無限集合とデデキント無限集合とは同概念であるが，選択公理のない世界では必ずしもそうでない．デデキント無限でない集合を**デデキント有限**集合という．すると“無限かつデデキント有限な集合が存在する”という命題は，選択公理を認めない世界では矛盾なく仮定することができるのである．

前節例 3 によって

定理 1.6.5　有理数全体の集合 Q は可算集合である．▨

定理 1.6.6*　可算集合たちの可算個の和集合はやはり可算集合である．

証明　定理は“各 $n \in \omega$ に対し可算集合 A_n が対応しているとき，それら全部の和集合 $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ が可算集合である”ことを主張している．そこで各 A_n の要素を並べて

（2）　$$A_n = \{a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_i^{(n)}, \cdots\}$$

としよう．

$$\pi(n, i) = n + (n+i)(n+i+1)/2$$

なる関数は $\omega \times \omega$ と ω との間の全単射を与える．そこで A_n の要素 $a_i^{(n)}$ に番号 $\pi(n, i)$ を割り当てると，A の各要素 a に少なくとも一つの自然数が対応する．（異なる n, m に対し A_n と A_m に共通な要素がありうるので 2 個以上の番号が指定される要素がありうる．）そこで改めて番号をつけ直す：

$$b_0 = a_0^0,$$

すでに $b_0, b_1, \cdots, b_m$ が定義されたとする．このとき b_{m+1} を

$$b_{m+1} = a_i^n$$

と定める．ただし a_i^n は $b_0, b_1, \cdots, b_m$ と異なる A の要素で $\pi(n, i)$ が最小である $\langle n, i \rangle$ をもつ要素である．このようにしてつくった

$$b_0, b_1, b_2, \cdots, b_m, \cdots \ (m \in \omega)$$

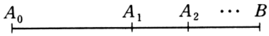
は，A の要素全体を丁度尽くしている．ゆえに A は可算集合である．▨

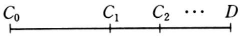
この証明では選択公理がどこに使用されたのか明確でない．実は各 A_n を(2)のように並べる場合に必要になるのであるが，詳細は後章にゆずる．

定理 1.6.7 直線上の重なり合わない線分（端点は一致してもよい）の集合が与えられると，それは必ず高々可算集合である．

証明 M をそのような一つの集合とする．M に属する各線分の内部に有理点(座標が有理数の点）が存在するので，例えば前節例 3 で Q の要素につけた番号に関しその線分に含まれる最小番号の有理点を対応させることにする．これにより M は Q の部分集合と 1 対 1 に対応する．ゆえに M は有限かまたは可算である．▨

なお **1.6.4** の証明技術によれば，任意の開線分と任意の閉線分とが同等であることを示すことができる．その際選択公理は必要としない．いま，A_0B を開線分，C_0D を閉線分とする．A_0B の中点を A_1，A_1B の中点を A_2，$\cdots$ と可算個の点 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ を線分 A_0B 上にとることができる．同様な方法で C_0D 上に可算個の点 $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$ をとる．





開線分 A_iA_{i+1} と開線分 C_iC_{i+1} とは同等であるからこれらの間の全単射 f_i がある．つぎに

$$g(A_1)=C_0, \quad g(A_2)=D, \quad g(A_{i+2})=C_i \qquad (i=1, 2, 3, \cdots)$$

とする．これら f_i, g を組み合せて開線分 A_0B から閉線分 C_0D への全単射をつくることができることは明白であろう．したがって

定理 1.6.8 任意の 2 つの線分は同等である．また任意の線分と直線とは同等である．▨

問 1. 狭義単調増加実関数 f (f: $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$, $x<y \rightarrow f(x)<f(y)$ なる関数）の不連続点の集合は高々可算集合であることを証明せよ．［ヒント：**1.6.7** を利用する.］

問 2. 2 つの可算集合の和集合は可算集合である．（選択公理は必要としない.）

問 3. 前述の π: $\omega\times\omega \longrightarrow \omega$ が全単射であることを証明せよ．▨

1.7　非可算集合

カントルは集合論に関する第1論文(1874年)において次の定理を証明した.

定理 1.7.1　代数的実数の集合は可算集合である†. ▨

ここで**代数的実数**というのは整数係数の代数方程式

(1)　$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$$

の根として表わされる実数のことである.（かかる方程式の根は一般に複素数であり，総合して**代数的数**と呼んでいる.）ここで $a_n \neq 0$, $a_0 \geq 0$ としてよい. このとき

(2)　$$h=n+a_0+|a_1|+\cdots+|a_n|$$

を(1)の**高さ**という. h を与えると(2)をみたす組 $(n, a_0, a_1, \cdots, a_n)$ は有限個しかないから，高さ h の代数方程式によって与えられる代数的実数は有限個である. これらを適当な順序で明確に番号づけることができる. $h=1, 2, 3, \cdots$ に対しこのことを行って $h=1, 2, 3, \cdots$ の順に，対応する代数的実数に番号をつけ直していけば，全代数的実数に自然数をもれなく対応づけることができる. その際すでに番号づけられたものは飛ばして，今までに現われてない最初のものに新番号をつけるのである.

つづいて同じ論文で，カントルは今度は

定理 1.7.2　実数全体の集合は非可算集合である. ▨

という画期的な定理を証明する. 彼は次のように論じた：いま，実数全体が

(3)　$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \qquad (n \in \omega)$$

と並べられたとする. 任意に一つの開区間 (α_0, β_0) をとる. この区間内に現われる(3)の中の最初の2実数をとり小さい方を α_1, 大きい方を β_1 とすると新しく開区間 $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha_0, \beta_0)$ が得られる. 再び (α_1, β_1) 内に現われる(3)の中の最初の2実数をとり，同様にして開区間 $(\alpha_2, \beta_2) \subset (\alpha_1, \beta_1)$ をつくることができる. 以下，これを続ける. この操作は有限回で終ることはない. かくて

(4)　$$\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\cdots<\beta_n<\cdots<\beta_2<\beta_1<\beta_0$$

なる系列が得られる. よく知られているように

(5)　$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha, \qquad \lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta$$

---

† この論文では“可算 (abzählbar)”という単語は未だ用いられていない. この術語が初めて現われたのは，1879年の論文においてである.

が存在する．このαは(3)の中に存在することができない．なぜなら，もしαが(3)の中に現われるなら$\alpha=x_n$なるnが定まる．区間$(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1})$は(4)，(5)によって$\alpha$を含むはずであるが，$n$番目の実数$x_n$は$n+1$番目の区間に入らないように区間がつくられている．これは矛盾であるから，全実数が(3)のように並べられるという仮定は誤りである．すなわち，実数全体の集合$\mathcal{R}$は非可算であることが結論された．

これらの結果にもとづきカントルは“任意の区間内に超越実数(代数的実数でない実数)が無数に存在する”というリュービュの定理の新証明が得られたと述べている．リュービュは無数に多くの超越数を具体的につくってみせた．カントルは具体的に超越数を示さなかったが，超越数の集合が代数的実数の集合より本質的に大きな集合であることを示した点で大きな進歩であったといえよう．

1）代数的実数の集合は可算である．　2）2つの可算集合の和は可算集合である．　3）実数全体の集合は非可算である．この3つの事実から“超越数の集合は非可算集合である”ことが結論されるのである．

上述のことは，カントルの集合論における最初の大発見である．当時の反響は知る由もないが，関係者の間ではセンセイショナルな“事件”であったと推察される．ところでこの時点(1874年)では，未だあの有名な“対角線論法”は現われていない．これが初めて登場するのは，1890年の論文においてである．

定理 1.7.3(=1.7.2)　実数からなる可算集合が与えられると，この集合に属さない実数が必ず存在する．したがって，実数全体の集合は非可算集合である．

証明　(対角線論法による証明)　$A=\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$を実数からなる任意の可算集合とする．各$a_n$を小数展開して

$$a_n=a_0^{(n)}+0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\cdots a_i^{(n)}\cdots \tag{6}$$

とする．ここに$a_0^{(n)}$は整数，$a_i^{(n)}$ $(i>0)$は数字である．ただし，あるところから先がすべて0という表現を許さないとする．いま，新しく

$$b=b_0+0.b_1b_2\cdots b_i\cdots$$

を$b_0=a_0^{(0)}+1$，$i>0$に対しb_iは$a_i^{(i)}\neq 9$なら$a_i^{(i)}+1$，$a_i^{(i)}=9$なら1であるとして定義する．すべての$i>0$について$b_i\neq 0$であるから，bの表現は許されたものである．このbはAに属さない．なぜならbとa_nでは第n位が違っているので$b\neq a_n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$であるからである．▨

カントルはこのような証明法，すなわち“対角線論法”を次の定理の証明の

中で初めて披露した:

定理 1.7.4　A を任意の集合とすると，A の部分集合全体の濃度は A の濃度より大きい: $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}>\overline{\overline{A}}$.

証明　まず $i: A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, $i(a)=\{a\}$ とすれば，i は単射である．ゆえに $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$. よって定理を証明するには $A \sim \mathcal{P}(A)$ でないことを示せばよい．そこで $A \sim \mathcal{P}(A)$ が成り立つと仮定し $\Phi: A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ を全単射とする．

$$B=\{a \in A \mid a \notin \Phi(a)\}$$

をつくれば，$B \subseteq A$ であるから $\Phi(b)=B$ なる $b \in A$ が存在するはずである．この b が B に属するか否かを論じよう．$b \in B$ とすれば，$b \notin \Phi(b)=B$ となり不合理．ゆえに $b \notin B$ でなければならない．すると $b \in \Phi(b)=B$ でなければならない．これは矛盾である．したがって $A \sim \mathcal{P}(A)$ ではあり得ない．▒

この証明は一種の対角線論法と考えられる．読者は自らその感じをつかんでほしい．

この定理は，文献 G. Cantor: *Uber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeiten*, Jahresbericht der Deutsch Math. Verein, Bd. I (1890–91), pp. 75–78 (カントル全集[27] p. 278 に再録)に初めて現われたもので，これにより“いくらでも大きい濃度の存在が保証され，その意義は極めて大きい”といわなければならない．

系として直ちに

定理 1.7.5　非可算集合が存在する(再々出).

証明　$\mathcal{P}(\omega)$ は ω と同等でない無限集合である．▒

$\mathcal{P}^2(\omega)=\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$, $\mathcal{P}^3(\omega)$, $\cdots$ とつくっていけば，いくらでも大きい濃度の集合が得られるわけである．これを可算回繰り返したその後はどうなるであろうか．それにはカントルのもう一つの大発明“超限”の概念を必要とする．よって次は超限順序数論を展開すべきであるが，これを素朴集合論で論じようとすると，上述の濃度についての場合と同様にしばしば言い逃れをしなければならない局面に出会う．したがってここでは，もはやこれらの取り扱いを中止し素朴集合論の展開はここで打ち切る．そして，次節で逆理について解説し，第 1 章を閉じることにする．

問 1.　${}^{\omega}\{0, 1, 2\} \sim {}^{\omega}\{0, 1\}$ であることを証明せよ．一般に A が有限集合ならば，${}^{\omega}A \sim {}^{\omega}\{0, 1\}$, ただし A は 2 個以上の要素をもつとする．▒

1.8 逆　理

集合論に逆理が生ずることを最初に指摘したのはブラリ・フォルチで，1897年のことである．順序数——この概念および性質は，後章を参照していただくことにして——の一つの集合 A が与えられるとそれは順序数の大小関係によって整列されるから，A 自身一つの順序数 α と相似になる．したがって，すべての順序数を小さい順に並べたもの W はそれ自身一つの順序数を表わし，Wに属するどの順序数よりも大きいことになる．しかし W はすべての順序数を含んでいるから $W\in W$，したがって $W<W$ となり不合理である．これがブラリ・フォルチの逆理である(**3.3** 参照)．カントル自身も一年程前にこの逆理に気づいていたという([24] p. 44)．後(1899年)，カントルは濃度全体の集合も矛盾を含むこと(彼は非整合的 inkonsistent といっている)をデデキントへの手紙の中で述べている．ラッセルは(1902年)，順序数とか基数とかによらず単に集合概念のみから逆理を導いた．今日**ラッセルの逆理**と呼ばれているものである：いま，すべての集合の集合を V とする．よって $V\in V$ である．そこで V を次の2つの部分集合に分割する．

M_1＝自分自身を要素とする集合全体の集合

M_2＝自分自身を要素として含まない集合全体の集合．

記号的に表わせば $M_2=\{x|x\notin x\}$ となる．M_2 自身集合であるから，$M_2\in M_2$ か $M_2\notin M_2$ かどちらか一方が成り立つはずである．しかし $M_2\in M_2$ とすれば定義により $M_2\notin M_2$．よって仮定 $M_2\in M_2$ は誤りであり，$M_2\notin M_2$ でなければならない．そうすると再び定義によって $M_2\in M_2$ となる．今度は正真正銘の矛盾である．

その後集合論においてのみならず，論理そのものにおける色々な形の逆理が発見されるに至った．有名なものを二，三挙げよう．“18字以内で定義できない最小の自然数”を n とする．n は18字以内で定義されているから不合理である．昔，予言者エピメニデスが言った：“クレタ人は嘘つきだ”と．不幸にしてエピメニデス自身がクレタ人であった．一層端的に“私は嘘つきだ”と言ったならどうか？　この主張が正しいとすれば，私は嘘つきだからこの言葉は正しくないであろう．また，もし正しくないとすれば，私は嘘つきでないからこの言葉は正しいはずである．いずれにしても不合理が生ずる．

逆理を回避するにはどうすればよいのであろうか．“すべての集合の集り”

とか“自分自身を要素として含まない集合の集り”のようなとてつもなく大きい集りは**集合でない**としておけばブラリフォルチ，カントル，ラッセル等の逆理は回避される．例えばラッセルの逆理で M_1 は集合でないから $M_1 \in V$ とはならずしたがって $M_1 \in M_1$ とか $M_1 \notin M_1$ を考えることは無意味なこととなる．そこで第0章で述べたように，集合を明確に定義することは困難であるから，“集合”，“属する”というような概念は無定義術語として導入し，それらの関係を“公理”によって規定するところの公理的集合論が起ったわけである．これによって不満足(第0章参照)ながらも集合論に生じた既知の逆理は避けられる．それはそれでよい．しかし，以上の処置では論理におけるさまざまな逆理を救うことはできない．逆理の原因をよく調べてみると，どれもいわゆる“自己引照”を含んだ主張で構成されている．自己引照という用語の代わりにラッセルに従って非述語的という言葉を用いよう．

集合 M と要素 m が，一方では m は M の要素であり他方では m が M 自身に(すなわち M 全体に)もとづいて定義されているならば，m の定義は**非述語的**であるといい，M は非述語的定義を含むという．そのとき m は M 全体に関係して定義されているから，特に m 自身を知らなければ m を定義することができないわけで，循環に陥ってしまう．例えば，“18字以内で定義できない最小の自然数”では，この文章で定義された自然数を m, 18字以内で定義できない自然数全体の集合を M とするとき，m の定義は M 自身に関係するから非述語的である．集合論における逆理も非述語的定義を含んでいる．ラッセルの逆理では V とその要素 M_1 の関係がそれである．一方では $M_1 \in V$ であり，他方では M_1 の定義は(すべての集合 x について $x \notin x$ かどうかをチェックしなければならないので) V 全体に関与している．したがって M_1 の定義は非述語的である．

そこで**非述語的定義を許さない**ことにすれば，今までに知られているすべての逆理を回避することができ万歳である．読者は上述の色々な逆理についてこれを確かめられたい．これで一応逆理から逃れることができた．しかし困ったことに，非述語的定義は数学でよく用いられる論法で，これを許さないとなると数学の大部分を失ってしまうことになる．ワイエルシュトラスの定理“上に有界な実数集合は最小上界をもつ”が，解析学において基礎中の基礎の定理であることは論をまたない．上の大前提はこれを失ってしまう．有理数全体 Q を ω と1対1に対応させ，有理数と自然数を同一視する．実数 X は Q のデデキント切断の上組と考える．M を，与えられた上に有界な実数集合とすれば，

M の最小上界 $S=\sup M$ は

(1) $$S=\bigcap\{X \mid X \in M\}$$

によって表わすことができる．M がある条件 $C(X)$ によって

$$X \in M \leftrightarrow C(X)$$

で与えられているとしよう．そのとき S は

$$\forall r \in Q\ [r \in S \leftrightarrow \forall X(C(X) \to r \in X)]$$

によって規定される．この S の定義は，一般に非述語的である．なぜなら S の要素は何かという問い(すなわちSは何であるかという問いにほかならない)に対し，一般にはどんな X が $C(X)$ をみたすかを知らなければならない．よって特に，S 自身に対し $C(S)$ かどうかを調べなければならないであろう．それは結局，S がどんな要素から成っているか知ることを要求するであろう．

このような次第でワイエルシュトラスの定理は，非述語的定義を含んでいることがわかった†．だから逆理を避けるのに，非述語的定義を排除するという要請は，認めるわけにいかないであろう．ここにわれわれは一頓挫をきたすことになった．今日，逆理をいかにしてうまく逃れ，しかも有用な結果を失わずにすますことができるかは未解決の大問題である．数学基礎論はこのような数学の危機を救う目的で誕生した分野であり，論理学，集合論などに多大の貢献をもたらしたけれども，根本問題——数学・論理学からの矛盾の完全追放——は未だ解決するに至っていない．恐らくこの問題は永久に解決できないものであろう．これは人知の限界を越える問題であると思える．人知の限界説は，理論物理学者オッペンハイマーがゲーデルの不完全性定理の意義について述べたときの言葉であるが，筆者も全く同感である．それでわれわれは次善の策として，集合論を公理論的に取り扱うことで満足しよう．

演習問題 I

1. 次の集合算の法則を証明せよ．

(1) $A \cap B=\phi \wedge A \cup B=C \to A=C-B$

(2) $A \cap (B-C)=(A \cap B)-C$

(3) $(A \cup B)-C=(A-C) \cup (B-C)$

(4) $A-(B \cup C)=(A-B) \cap (A-C)$

---

† $\sup M$ が非述語的定義によらないで定義できるような集合 M は沢山ある．“すべての”有界集合がこの性質をもつと主張するところに問題がある．

（5）　$(A-B)^c=A^c\cup B$

（6）　$A-(A-B)=A\cap B$

（7）　$A\cup(B-A)=A\cup B$

（8）　$A\cap B^c=\phi\leftrightarrow A\subseteq B.$

2.　$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$ を A と B の**対称差**という.

（1）　$A\triangle B=B\triangle A$

（2）　$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$

（3）　$A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$

（4）　$A\triangle B=\phi\leftrightarrow A=B$

（5）　$A\triangle\phi=A$

（6）　$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B).$

3.　R が A 上の関係であるとき,

（1）　R が反射的である $\leftrightarrow$ **対角線集合** $\{\langle x, x\rangle | x\in A\}\subseteq R\cap R^{-1}$

（2）　R が対称である $\leftrightarrow R=R^{-1}.$

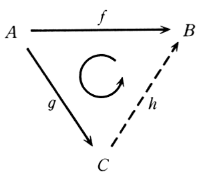
4.　$f: A\longrightarrow B$ とする.

（1）　f が単射である $\leftrightarrow \forall X, Y\subseteq A[f(X\cap Y)=f(X)\cap f(Y)]$

（2）　f が全射である $\leftrightarrow \forall X\subseteq A[f(A-X)\supseteq B-f(X)]$

（3）　f が全単射である $\leftrightarrow \forall X\subseteq A[f(A-X)=B-f(X)].$

5.*　$f: A\longrightarrow B$, $g: A\longrightarrow C$ とし g は全射であるとする.



$\Longleftrightarrow\ \forall x, y\in A[g(x)=g(y)\rightarrow f(x)=f(y)]$

（$\overset{}{\underset{h}{\dashrightarrow}}$ は“写像 h が存在する”ことを表わす.）

6.　$\pi^*: \omega\times\omega\longrightarrow\omega$, $\pi^*(m, n)=2^m\cdot(2n+1)-1$ は全単射である.

7.*　A が無限集合, B が可算集合ならば, $A\cup B\sim A$ である.

8.　$\overline{\overline{A}}\leq\overline{\overline{B}}\wedge\overline{\overline{C}}\leq\overline{\overline{D}}\rightarrow\overline{\overline{A\times C}}\leq\overline{\overline{B\times D}},\ \overline{\overline{{}^{C}A}}\leq\overline{\overline{{}^{D}B}}.$

9.　$A\cap B=\phi$ なら, ${}^{(A\cup B)}X\sim{}^{A}X\times{}^{B}X,$

10.　ブール代数 $\mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3\})$ に対する(ハッセ)ダイヤグラムをかけ.

11.　**1.4.1** の 3°)の逆は成立しない. その反例を示せ.

12.　$\omega!=\{f | f: \omega\xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}}\omega\}$ とおく. $\omega!$ の要素を ω の**順列**という. $\omega!\sim{}^{\omega}\omega$ であることを証明せよ.

2

集合論の公理系とクラス概念

本章では，集合論に対するいわゆるツェルメロ・フレンケルの公理系を提示し，この体系から容易に導かれる基本概念と結果を述べる．その途上，クラス概念が導入される．まず，必要な集合論の言語から始めよう．

2.1 集合論の言語

一般に，一つの数学理論を展開するにはその理論を記述する**言語**が必要である．われわれは集合論を行うのであるから，集合について記述するための言語をあらかじめ定めておかなければならない．ここでは，第1階述語論理体系の言語を用いることにする．第1階述語論理は，現在の大部分の数学理論を展開するのに十分な論理体系であること，第2階以上の述語論理になると論理体系自身が集合概念を必要としてしまうことなどが主な理由である．

われわれが用いる**集合論言語**は次のような記号系と規則とからなる系 $\mathcal{L}$ である：

定義 2.1.1

(i) **記号系**

論理記号	$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\neg$
限定作用素†	$\exists$（存在記号），$\forall$（全称記号）
特異記号	(,)
個体変数	$\mathbf{v}_0$，$\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$，$\cdots$（無限個）　（単に**変数**と略称する．）
等号	$=$

† quantifier. 訳語は一定していない．量記号，量限定記号なども用いられている．

2項述語記号　　$\in$

（ii）　**形成規則**（**論理式**の定義）

1）　x, y が変数ならば，$x=y$ と $x \in y$ は論理式である．これらを原子論理式という．

2）　φ と ψ が論理式ならば，$(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \to (\psi)$, $\neg(\varphi)$ は論理式である．

3）　φ が論理式で x が変数ならば，$\exists x(\varphi)$, $\forall x(\varphi)$ は論理式である．（このとき x は，論理式 $\exists x(\varphi)$ または $\forall x(\varphi)$ において**束縛**されている，または**束縛変数**であるという．束縛されてない変数を**自由**である，または**自由変数**という．これらは一つの論理式に関係していわれることである．）

4）　以上によって与えられたもののみが論理式である．

ここで $\mathcal{L}$ の記号系にない文字 φ, ψ, x が用いられている．これは $\mathcal{L}$ の個々の記号または記号列を表わすのに使用される文字で，**超記号**と呼ばれる．例えば x は，個体変数 $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\cdots$ の中の任意特定の一つを表わしていると考える．場合によっては多少の条件つきで用いられるが，上の(ii)の3)では x は任意の $\mathbf{v}_i$ でよい．また φ, ψ は，既に論理式として構成された記号列を任意に表わしている．変数に対する超記号として a, b, $\cdots$, x, y, $\cdots$ などを用い，論理式に対する超記号として φ, ψ, θ, $\cdots$ が用いられる．

$\mathcal{L}$ は集合論を展開するのに十分な言語である．このほかにも関数記号や他の述語記号を含む一般的な言語がある．例えば自然数論は集合論より狭いが，それを形式的に論ずるには関数記号と定数記号とを必要とする．集合論においても特定な集合（例えば空集合のような）を表わす定数記号や，特定な関数を表わす関数記号をもつ方が便利である．しかしわれわれは，これらをあらかじめ言語の記号として記号系の中へ含ませることはしない．必要なたびに“定義によって”新しい記号を導入して使う．例えば公理によって（または一般に公理から導かれた定理として），空集合の存在 $\exists y \forall x(x \notin y)$ がいえたならば，

（1）　$$\forall x(x \notin \phi)$$

によって新しく定数記号 ϕ を導入して利用する．(1) を ϕ に対する**定義論理式**という．これは便法であって必須のものではない．というのは，ϕ を必要とする一つの議論 $\psi(\cdots\phi\cdots)$ において，ϕ をそこで用いられてない変数 y でおきかえ，最後に

（2）　$$\exists y[\forall x(x \notin y) \wedge \psi(\cdots y\cdots)]$$

とすればよいからである．(2)よりも $\psi(\cdots\phi\cdots)$ の方が見通しがよいので，

われわれは積極的に定数記号を定義して用いることにする．このようなことは一般の数学において日常行われていることである．

上の解説の際すでに論理式の例が現われたが，形成規則をふり返ってみよう．$x \in y$, $y=x$ は1)によって論理式である．よって3)により $\exists y(y=x)$ は論理式であり，したがって2)により $(x \in y) \vee (\exists y(y=x))$ は論理式である．さらに3)を2回使って

$$\exists y(\forall x((x \in y) \vee (\exists y(y=x)))) \tag{3}$$

は論理式である．ここで括弧は混乱が生じない程度に省略することにする．(3)は $\exists y \forall x(x \in y \vee \exists y(y=x))$ で十分である．複雑な式ではカギ括弧［，］も適宜用いる．これらは補助的手段である．

さて記号は無意味のものとして取り扱い，記号の間の関係は公理によって規定されるというのがヒルベルト流の形式的公理論であった．われわれも原則としてそれに従いたい．しかし，論理体系までも形式的公理論で取り扱うとなると，論理の公理系から始めて推論法則の導入，形式的証明，形式的定理等々色々な概念を定義してかからなければならなくなり，極めて繁雑な準備が必要となる．そこで次善の策として，われわれは形式的なものを**解釈を通して**取り扱うことにする．したがって $\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\neg$ はそれぞれ“あるいは”，“そして”“ならば”，“でない”の意味をもって取り扱い，$\exists x$ は“ある x について”を，$\forall x$ は“すべての x について”を意味するものとして取り扱う．また，このような記号のみによって議論を展開することは，無味乾燥となって内容を把握するのが困難となるので，日本語も大いに使用する．そのようにして展開した議論を形式的論理体系の推論に直すことができることは容易に了解することができるであろう．形式的論理についての詳細は数理論理学の書物にゆずる．なお，上に示した記号の間には関係があることを注意しておこう．例えば $\varphi \rightarrow \psi$ は $\neg\varphi \vee \psi$ と同じ意味であり，$\neg \forall x \varphi(x)$ は $\exists x \neg \varphi(x)$ と同じ意味である等々．そのような関係はことわりなしに利用する．

集合論に関するものはヒルベルト流に考える．よって，**集合**と $\in$ とは**無定義**術語である．個体変数は**集合を表わす**変数である．それを強調して“集合 x に対し…”という記述をしばしば行う．集合が**すべて**であって今のところそれ以外に対象物はない．要素自体も集合である．よって例えば $\forall x \varphi(x)$ は“すべての**集合** x について $\varphi(x)$ が成り立つ”ことを表わし，$\exists x \varphi(x)$ は“$\varphi(x)$ が成り立つ**集合** x が存在する”ことを表わす．そうして集合たちの間の諸関係——例えば $\forall x(x=x)$ とか $\forall x \exists y(x \in y)$ というような関係——は，公理ま

たは公理からの諸帰結にもとづいて決定されるのである．

$x \in y$ は単なる記号列に過ぎない．しかし，解釈を通して取り扱うわれわれの立場からは“x は y の**要素**である”を意味する．実はそう解釈するように**意図して**公理系が構成されているのである．そこでわれわれも集合 x, y について $x \in y$ が成り立つとき，x を y の**要素**と呼ぶことにする．

便宜上，種々の短縮形を用いる．$\neg(x=y)$ や $\neg(x \in y)$ の代わりにそれぞれ $x \neq y$, $x \notin y$ を用いることが多い．x を変数として論理式 $\varphi(x)$ とかいた場合，これは x が $\varphi(x)$ において自由変数であることを意味するが，x が実際論理式 $\varphi(x)$ に現われなくてもよい．また $\varphi(x)$ とかいたとき，x 以外の自由変数を含んでもよい．$\varphi(x)$ が与えられたとき，$\varphi(y)$ は $\varphi(x)$ において自由変数 x を φ の中の他の変数と衝突を起さない自由変数 y でおきかえて得られる論理式を表わす．(3) において y が 2 回重なって束縛変数として現われているが，このような場合紛らわしいのでこの論理式に現われていない別な記号で一方をおきかえるのがよい：

(3′)
$$\exists y \forall x(x \in y \vee \exists z(z=x)).$$

このようにしても意味は変わらないことに注意．このほかよく利用される略記法として次のものがある：

$(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$　　に対し　　$\varphi \leftrightarrow \psi$,

$\exists y \forall x[x=y \leftrightarrow \varphi(x)]$　または　$\exists y \varphi(y) \wedge \forall x \forall y[\varphi(x) \wedge \varphi(y) \rightarrow x=y]$†

　　に対し　　$\exists ! y \varphi(y)$,

$\exists x(x \in y \wedge \varphi(x))$　　に対し　　$\exists x \in y \varphi(x)$,

$\forall x(x \in y \rightarrow \varphi(x))$　　に対し　　$\forall x \in y \varphi(x)$　　と略記する．

自由変数を含まない論理式——例えば (3′) の論理式はその一つである——を，**文**または**閉論理式**という．論理式 φ に対し φ が含むすべての自由変数を全称記号 $\forall$ で束縛することによって得られる論理式を $\forall \varphi$ と略記し φ の**全称閉包**という．

なお形成規則でもう一つ注意したいのは，4)の意義である．もし 4)が欠けているならば，例えば $\exists(\neg(x=y))$ が論理式であるか否かを決定することができない．1)～3)だけではこのような記号列について何もいうことができない．しかし 4)をおくことによって，この記号列が論理式でないと結論できる．なぜなら，この記号列は 1)～3)の方法では決して得られないので，4)によってその

† $\exists$ と $\forall$ の**重なり具合**は論理式の複雑さのパロメーターである．“ただ一つの存在”を表わす論理式としては前者の方がより**複雑**であり，後者の方がベターである．

ようなものは論理式から**排除される**のである．4)を extremal clause——意訳して**最小性条項**という．素朴集合論を利用するならば，4)は"論理式の集合はすべての原子論理式を含み，操作2)，3)の下で閉じた**最小の**記号列たちの集合である"ことを主張するからである．

2.2 外延公理

以下の節で，集合論の公理を挙げ，若干の解説を行う．まず集合の間の**相等性**，すなわち集合 x, y が等しい $(x=y)$ ということを規定しなければならない．内容的に考えると集合はその要素から成っているので，集合はその要素により決定される．よって[†]つぎの公理をおく：

（I） **外延公理**（x, y, z は異なる変数である．以下同様に取り扱う．）

（1） $x=y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$. ▨

正しくは全称閉包の形

（2） $\forall x \forall y[x=y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)]$

にかくべきであるが，通常(1)の形を用いる．これは一種の便法であるが，数学ではごく普通に用いられるものである．（試みに一般の数学書の定理の記述を分析されたい．） このような用法のとき，"(1)を全称扱いする"と称する．以下いちいちことわらないでこの便法を利用する．

次の5つの論理式を集合論言語 $\mathcal{L}$ 上の**等号公理**という：

（i） $x=x$

（ii） $x=y \rightarrow y=x$

（iii） $x=y \wedge y=z \rightarrow x=z$

（iv） $x=y \wedge z \in x \rightarrow z \in y$

（v） $x=y \wedge x \in z \rightarrow y \in z$.

これらはわれわれの（$\mathcal{L}$ 上の）述語論理の公理系の中に既に含まれている——本書では述語論理の公理系を述べないが——もので，集合論公理系には入れないのが普通である．ただし(i)～(iv)は，外延公理と他の述語論理の公理とから導くことができる．

---

† 正式にはこのような御託を並べる必要はない．ここでは理解のために公理がどのような観点から導入されたかを解説したのである．以下でもこのような御託を並べるであろう．

†† ことわりなしに論理式といえば集合論言語 $\mathcal{L}$ における論理式のことである．

定理 2.2.1 $\varphi(x)$ を任意の論理式[††]，y を $\varphi(x)$ に現われない変数とすると

(vi) $x=y \wedge \varphi(x) \rightarrow \varphi(y)$

が成り立つ．

証明 $\varphi(x)$ の**構成に関する帰納法**で容易に証明される．▨

問 1. **2.2.1** を証明せよ．

以下では(i)〜(vi)の使用をいちいちことわらない．

次に φ, ψ が論理式のとき

$$\varphi \equiv \psi$$

という記法は，左辺の φ を右辺の ψ で定義することを表わすものとする．代わりに $\varphi \leftrightarrow \psi$ とかいても混乱は生じないが，強調して $\equiv$ を用いることが多い．

定義 2.2.2 $x \subseteq y \equiv \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$.

$x \subseteq y$ のとき，x は y の**部分集合**であるという[†]．▨

定理 2.2.3 $x \subseteq y \wedge y \subseteq x \leftrightarrow x=y$

証明 証明に際し使用してよい道具は，常識的な推論方法(正確には述語論理)以外は今までに導入された公理だけである．ここでは後者は外延公理だけである．$x \subseteq y \wedge y \subseteq x \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in x) \wedge \forall z(z \in y \rightarrow z \in x)$

$$\leftrightarrow \forall z[(z \in x \rightarrow z \in y) \wedge (z \in y \rightarrow z \in x)]$$

$$\leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x=y$$ ▨

定義 2.2.4 $x \subset y \equiv x \subseteq y \wedge x \neq y$.

$x \subset y$ のとき，x は y の**真部分集合**であるという．強調するときは $x \subsetneq y$ とかくこともある．▨

定理 2.2.5

1) $x \subseteq x$ 　　2) $x \subseteq y \leftrightarrow x \subset y \vee x=y$

3) $x \subseteq y \wedge y \subseteq z \rightarrow x \subseteq z$ 　　4) $x \subseteq y \wedge y \subset z \rightarrow x \subset z$

5) $x \subset y \wedge y \subseteq z \rightarrow x \subset z$.

問 2. **2.2.5** を証明せよ．▨

2.3 集合の構成に関する公理

既に何か集合がいくつか与えられているとき，それらを使って新しい集合を構成することは集合論の第一歩である．本節では，そのような構成原理——演算といってもよい——をいくつか公理として要請する．

---

† 第1章と重なるところが処々にあるが，重複をいとわず述べることにする．

（II）**対公理**　x, y が集合のとき x と y だけを要素としてもつ集合 z が存在する：

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y). \quad ▨$$

与えられた x, y に対し

（1）　$$\forall t(t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$$

をみたす z はただ一つしかない．なぜなら別に $\forall t(t \in z' \leftrightarrow t = x \vee t = y)$ なる集合 z' があれば(1)と合せて $\forall t(t \in z' \leftrightarrow t \in z)$ が導かれ，外延公理によって $z' = z$ となるからである．さて与えられた集合 x, y に対しこの対公理によって一意存在が保証された集合 z を

$$\{x, y\}$$

で表わし，x, y の**対集合**という．特に

$$\{x, x\} \quad を \quad \{x\} \quad で表わし$$

1要素-集合または**1元-集合**と呼ぶ．定義から直ちに

$$\{x, y\} = \{y, x\}$$

が導かれる．

例 1.　与えられた集合 x, y, z に対し対公理によって $\{x, y\}, \{z\}$ が存在するからこれらから再び対公理によって $\{\{x, y\}, z\}$, $\{\{x, y\}, \{z\}\}$ なる新しい集合がつくられる．また x から出発してつぎつぎに新しい集合 $\{x\}$, $\{\{x\}\}$, $\{\{\{x\}\}\}$, $\cdots$ 等がつくられる．**現段階では** $x \neq \{x\}$ かどうかわからない．その決定は後で導入されるある公理をまたなければならない．▨

対を用いて順序対を次のように定義する．

定義 2.3.1　$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$．これを x, y の**順序対**という．▨

順序対は次の性質によって特徴づけられる：

定理 2.3.2　$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle \leftrightarrow x = u \wedge y = v$．▨

証明に先立って一つの補題を示そう．

補題 2.3.3　$\{x, y\} = \{x, z\} \rightarrow y = z$．

証明　$y = x$ ならば $\{x\} = \{x, z\}$ であるから定義によって $x = z$．したがって（等号公理により）$y = z$．$y \neq x$ なら $y \in \{x, y\} = \{x, z\}$ より $y = z$ でなければならない．▨

定理 2.3.2 の証明　$\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ より $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$．2つの場合に分ける．1）$\{x\} = \{u\}$ のとき．外延公理によって $x = u$．ゆえに $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, v\}\}$．**2.3.3** より $\{x, y\} = \{x, v\}$．再びその補題から $y = v$．　2）$\{x\} = \{u, v\}$ のとき．$x = u = v$ となるから仮定式によって $\{\{x\},$

$\{x, y\}\}=\{\{x\}, \{x, x\}\}$．補題を用いて $y=x$ が導かれるから，$x=u=y=v$ である．ゆえに $\langle x, y\rangle=\langle u, v\rangle \to x=u \land y=v$．逆は明らかである．▨

定義 2.3.4 $\langle x_1\rangle=x_1$, $\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle=\langle x_1, \langle x_2, \cdots, x_n\rangle\rangle$†
$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$ を $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の**順序 n-組**という．▨

定理 2.3.5 $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle=\langle y_1, \cdots, y_n\rangle \leftrightarrow x_1=y_1 \land \cdots \land x_n=y_n$.

証明 n についての帰納法による．（演習問題 II，3）▨

（III）**和集合公理** 集合たちの集合が与えられると，これらの集合の要素を要素とする集合が存在する：

（2） $$\forall x \exists y \forall z[z \in y \leftrightarrow \exists u(u \in x \land z \in u)].$$ ▨

与えられた集合 x に対し (2) で存在が保証された y は前の場合と同様にして一意的に定まることがわかる．そこでこの y を x の**和**または x の**和集合**といい

$$\bigcup x$$

で表わす．また特に

$$\bigcup\{x, y\} \quad を \quad x\cup y \quad で表わし$$

x と y の**和**(**集合**)という．

定理 2.3.6 （i） $t \in x\cup y \leftrightarrow t \in x \lor t \in y$ （ii） $\{x_1, x_2\}=\{x_1\}\cup\{x_2\}$.

証明 （i） $t \in x\cup y \leftrightarrow \exists u(u \in \{x, y\} \land t \in u) \leftrightarrow \exists u[(u=x \lor u=y) \land t \in u] \leftrightarrow \exists u(t \in x \lor t \in y) \leftrightarrow t \in x \lor t \in y$. （ii） $t \in \{x_1, x_2\} \leftrightarrow t=x_1 \lor t=x_2 \leftrightarrow t \in \{x_1\} \lor t \in \{x_2\} \leftrightarrow t \in \{x_1\}\cup\{x_2\}$．この最後の同値性は(i)による．▨

順序 n-組のときと同様にして n についての帰納法で

（3） $$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}=\{x_1\}\cup\{x_2, \cdots, x_n\}$$

によって **n 元-集合**が定義される．これに対し次式が成り立つ：

（4） $t \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \leftrightarrow t=x_1 \lor t=x_2 \lor \cdots \lor t=x_n$. ［演習問題IIの 1］

問 1. 次を証明せよ．1） $\bigcup\phi=\phi$（ϕ については **2.4** 参照）．2） $\bigcup\{x\}=x$.

問 2. $(x_1\cup x_2)\cup x_3=x_1\cup(x_2\cup x_3)$ を証明せよ．これによって括弧をはずして $x_1\cup x_2\cup x_3$ と書き表わしてよいことがわかる．同様にして $x_1\cup x_2\cup\cdots\cup x_n$ が定義される．▨

（IV）**べき集合公理** 集合が与えられるとその部分集合たちを要素とする集合——すなわち与えられた集合の部分集合全体の集合——が存在する：

（5） $$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z\subseteq x).$$ ▨

x に対し存在するかかる y は一意的である．これを x の**べき集合**といい

---

† これは **n についての帰納法**による定義であり，現在展開中の公理的集合論の外の議論である．このような議論を一般に**メタ理論**(超理論)という．n が 2 とか 3 とかいうように具体的に与えられたとき $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ が定義されるのである．

$$\mathcal{P}(x)$$

で表わす．$\mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$ を $\mathcal{P}^2(x)$ で表わす．$\mathcal{P}^n(x)$ についても同様である．

2.4 集合の存在に関する公理

次の空集合存在公理は他の公理の導入の仕方次第で入れなくてもよい場合があるが，集合論の展開を容易にするためにこれを公理として導入し，他の公理にもこれを利用することにする．

（V） **空集合存在公理** 要素をもたない集合が存在する：

（1） $$\exists x \forall y (y \notin x).$$ ▨

(1)なる x は一意的である．これを**空集合**といい，ϕ で表わす：

（2） $$\forall y (y \notin \phi).$$

これを ϕ の**定義論理式**という(既述)．

定理 2.4.1 （i） $\forall x(\phi \subseteq x)$ （ii） $\phi \cup u = u$.

証明 （i） $\forall y(y \in \phi \to y \in x)$ は $y \in \phi$ が偽であるから正しい†．よって $\phi \subseteq x$ である．（ii） $t \in \phi \cup u \leftrightarrow t \in \phi \vee t \in u \leftrightarrow t \in u$, なぜなら $t \in \phi$ は偽だからである．▨

問 1. 与えられた集合 $x=\phi$ に対し $y=\{\phi\}$ は **2.3** の(5)を満足することを示せ．したがって $\mathcal{P}(\phi)=\{\phi\}$ である．また与えられた $x=\{\phi\}$ に対し $y=\{\phi, \{\phi\}\}$ は同じ(5)を満足し，したがって $\mathcal{P}(\{\phi\})=\{\phi, \{\phi\}\}$ であることを示せ．（このように簡単な集合が具体的に与えられるならば，その集合のべき集合を公理(IV)によらないでつくることができることがある．しかし任意に与えられた集合 x に対し $\mathcal{P}(x)$ の存在は公理(IV)によらざるを得ない．）▨

（VI） **無限公理** （無限集合存在の公理）

（3） $$\exists a(\phi \in a \wedge \forall x(x \in a \to x \cup \{x\} \in a)).$$ ▨

(3)の a がみたしている条件を眺めてみよう．a は ϕ を要素として含む．したがって a は $\phi \cup \{\phi\}$ を要素として含み，したがってまた $\phi \cup \{\phi\} \cup \{\phi \cup \{\phi\}\}$ を要素として含む，… 以下この操作を続けることができるので，かかる a はわれわれがもっている無限集合のイメージに合致している．後でこの公理にもとづいて有限・無限の概念が定義されるであろう．

無限公理の提示の仕方は上の(3)に限るわけではない．例えば

$$\exists a[\phi \in a \wedge \forall x(x \in a \to \{x\} \in a)]$$

なる形がある．これはツェルメロが採用した無限公理の形である．(3)を採用

---

† **1.1** p. 7 の脚注 †† を参照．

した理由は後でわかるであろう.

2.5 置換公理

1908年ツェルメロによって最初導入された公理系には，これより弱い形のもの——分出公理(後述)——が採用されていたため理論展開が不十分であった．置換公理は後(1922年頃)フレンケルとスコーレムによって独立に発見されたもので，これを加えると普通の集合論を展開するのに十分であることが認められた.

(Ⅶ) **置換公理図式** $\varphi(x, y)$ が $\mathcal{L}$ の論理式ならば次の形の論理式は公理である：

(1) $$\forall x \forall y \forall z[\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y=z] \to \forall u \exists v \forall y[y \in v \leftrightarrow \exists x \in u \varphi(x, y)]$$

ただし $\varphi(x, y)$ は z, v を自由変数として含まないとする．$\varphi(x, y)$ は他の自由変数を含んでよい．その場合は(1)を全称扱いする．▨

これは1個の公理ではなく，いろいろな φ に対しつくられる(1)なる形の論理式の集りと考えられる．その意味で**公理図式**という．個々の φ に対し(1)を置換公理という．まとめて置換公理図式と呼ぶわけである.

さて(1)の意味を考えてみよう．(1)の前提

(2) $$\forall x \forall y \forall z[\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \to y=z]$$

は与えられた x に対し $\varphi(x, y)$ をみたす y が存在すればそれは一意的であることを主張している．したがって与えられた x に対し $\varphi(x, y)$ なる y が存在すれば，この一意的な y を $F(x)$ の値とし，そうでないときは $F(x)$ を未定義とすることによってかかる φ から一つの“部分関数” $F(x)$ が定まる．(部分関数というのは未定義の部分があってもよいような関数である．なお関数概念はクラスとして後でキチンと定義される.) そうして $F(x)$ が定義されていれば $\varphi(x, F(x))$ が成り立つ．そこで(1)の結論は，与えられた集合 u に対し

$$\forall y[y \in v \leftrightarrow \exists x \in u(y=F(x))]$$

ということであるから，v は“x が集合 u 上を走るときの $F(x)$ の値たちの集合”である．よって置換公理は“集合 u と関数 F が与えられたとき，u の F による像は集合である”，“関数による集合の像は集合である”†，あるいは“集合たちを集合サイズだけ集めたものは集合である”ことを主張しているこ

† **2.9.10** 参照.

とになる．なお(1)の結論中の v は u に対し一意的である．これは外延公理から直ちに従う．

(VII′) **分出公理図式** $\phi(x)$ は v を自由変数として含まない論理式とする．そのとき次の論理式は公理である：

(3) $$\forall u \exists v \forall x(x \in v \leftrightarrow x \in u \wedge \phi(x)).$$ ▨

(3)は $\phi(x)$ が成り立つような u の要素 x たち全体が一つの集合 v を形成することをいっている．かかる v は u に対し一意的に定まる．これを

(4) $$v=\{x \in u \mid \phi(x)\}$$

で表わす．

定理 2.5.1 (VII) → (VII′)

証明 (VII′)を導くために $\phi(x)$ と u を与える．y は $\phi(x)$ に現われないとする．

$$\varphi(x, y) \equiv \phi(x) \wedge x=y$$

として置換公理(1)を適用する．等号公理によって(1)の前提が成り立つから

$$\exists v \forall y[y \in v \leftrightarrow \exists x \in u(\phi(x) \wedge x=y)]$$

ところで $\exists x \in u(\phi(x) \wedge x=y) \leftrightarrow y \in u \wedge \phi(y)$ なるゆえ結局

$$\exists v \forall y(y \in v \leftrightarrow y \in u \wedge \phi(y)).$$ ▨

したがって (VII′) は公理図式としてわれわれの公理系に入れておかないけれども自由に利用してよいわけである．そしてこれは大変便利な結果である．本節の初めで述べたツェルメロの弱い形の公理とはこの (VII′) ことであり，**分離の公理**と呼ばれることもあるが本書では分出公理(図式)と呼ぶ．

分出公理(3)で u を省くと

(5) $$\exists v \forall x(x \in v \leftrightarrow \phi(x)).$$

これを**内包公理**(図式)という．カントルの素朴集合論ではこのような推論が許される．ところがこの公理からは矛盾が生じてしまう．なぜなら $\phi(x)$ として $x \notin x$ をとれば(5)は

$$\forall x(x \in v \leftrightarrow x \notin x)$$

なる**集合** v の存在を主張する．したがって特に

$$v \in v \leftrightarrow v \notin v$$

という矛盾に逢着してしまう．これは第1章で述べた**ラッセルの逆理**にほかならない．そこで $\phi(x)$ をみたすすべての x をひとまとめにすることをやめて，与えられた集合 u に属する x たちに制限すればこのような矛盾は起らないであろうと考えたのが(VII′)である．

例 1.　y, z を与えられた集合とし $u=y$, $\phi(x)\equiv x\in y\wedge x\in z$ として(3)を適用すれば

$$\forall x(x\in v\leftrightarrow x\in u\wedge x\in y\wedge x\in z)$$

なる集合 v の存在がいえる．この v を

$$y\cap z$$

で表わし，y と z の**共通部分**という．なぜならこれに対し

$$x\in y\cap z\leftrightarrow x\in y\wedge x\in z$$

が成立するからである．もし $y\cap z=\phi$ ならば y, z は**互いに素**である，または y, z は**交わらない**という．▨

上例のように種々の論理式に対応し種々の(集合についての)演算を定義することができる．

問 1.　$y\cap z=\phi\leftrightarrow\forall x(x\in y\to x\notin z)$ を確かめよ．

問 2.　与えられた集合 y, z に対し例1の方法で次の集合が存在することを導け：

1)　条件 $t\in y-z\leftrightarrow t\in y\wedge t\notin z$ をみたす集合 $y-z$

2)　$x\in \mathrm{Dom}(y)\leftrightarrow\exists t(\langle x, t\rangle\in y)$ をみたす集合 $\mathrm{Dom}(y)$．▨

2.6　正則性と選出

いま素朴な意味で(というのは**集合列**が未だ定義されてないからである)次の条件(1)をみたす集合列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ を考えてみよう：

(1)　$$\cdots\in x_2\in x_1\in x_0$$

これを $\in$-**下降列**という．もし無限列なら，$\in$-**無限下降列**という．いままでの公理だけからは $\in$-無限下降列の存在を否定することができない．もし $x\in x$ なる集合 x が存在すれば

$$\cdots\in x\in x\in x$$

となって確かに $\in$-無限下降列が生ずる．かかる x の存在は直接矛盾に導くわけではないが，ラッセルの逆理と密接に関係するから，ないに越したことはない．そこで(1)のような $\in$-無限下降列が存在しないと要請すれば $x\in x$ なる x の存在も排除される．のみならず集合に対するわれわれの直観では，どんな $\in$-下降列も有限回でとまって出発点の空集合 ϕ に到達し† それ以上進まないというのがピッタリしている．そこで次の公理をおく：

(Ⅷ)　**正則性公理**(**基底公理**ともいう)　空でない集合はそれ自身と交わらな

---

†　われわれの集合論では要素を含まない集合として空集合だけをもつ．空集合に当るもの(urelement という)をいくつかもつ集合論も考えられる．

い要素を含む：

（2）　$\forall a(a\neq\phi\rightarrow\ \exists x\in a(x\cap a=\phi))$. ▨

この公理から $\in$-**無限下降列の非存在**を導くことは後章にゆずる．またこの公理の他の効用もそこに述べられるであろう．例えばこの公理のおかげで，ある特定の操作によってどの集合も下からつくっていったある集合に属することがわかる．ここでは対公理のところで触れた $x\neq\{x\}$ かどうかの問題を片づけておこう．

定理 2.6.1　$\forall x(x\notin x)$.

証明　$t\in t$ なる t が存在するならば，正則性公理において $a=\{t\}$ とすれば，$x\in a\wedge x\cap a=\phi$ なる x の存在がいえる．a の性質から $x=t$．よって $\phi=t\cap a=t\cap\{t\}\ni t$ となり矛盾．ゆえに $t\in t$ なる t は存在しない．▨

系 2.6.2　$\forall x(x\neq\{x\})$.

証明　もし $x=\{x\}$ ならば，$x\in x$ となるから **2.6.1** に反する．▨

定理 2.6.3　$\neg\exists x\exists y(x\in y\in x)$.

証明　もし $x\in y\in x$ なる x, y が存在すれば，$a=\{x,y\}$ が正則性公理に対する反例になってしまう．▨

問 1.　$x_1\in x_2\in\cdots\in x_n\in x_1$ なる集合 x_1, x_2, $\cdots$, x_n は存在しない．▨

次に選択公理へ向かおう．

（IX）　**選択公理**　2つずつ互いに素な空でない集合たちの集合 z が与えられていれば，これに対し次の条件をみたす集合 u が存在する：u は z に属する各集合と丁度1点を共有する．すなわち

（3）　$$\forall z[\forall x(x\in z\rightarrow x\neq\phi)\wedge\forall x\forall y(x,y\in z\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\phi)$$
$$\rightarrow\ \exists u\forall x\exists t(x\in z\rightarrow u\cap x=\{t\})].$$ ▨

z に対しこの u の代わりに $u'=u\cap\bigcup z$ を考えると，u' は z に属する各集合から1要素ずつとり出してつくった集合になっている．その意味で u' を z の**選択集合**と呼ぶことができる．選択公理は色々な形の同値な命題をもっている．これらについては後節で論ずる機会があるであろう．

さて z に対する選択集合は一意的に決まるわけではない．またこの公理は z の各集合から1要素を選ぶ方法については何もいっていない．選択集合は神様から授かった集合なのである．特殊な z については選択公理によらないで直接選択集合を構成することができる．しかし一般にはわれわれは選択集合をつくる手段をもっていない．そこで全体を見渡せる神様にお助けを願う．それが選択公理である．この点で選択公理に依存しての選択集合の存在は，記述集合論

における主題の一つ“具体的選出”とは大いに異なるのである．今までの他の公理はわれわれの素朴な集合観にかなりマッチしたもので，ユークリッド幾何学の公理におけるように信じて下さいといわれればわれわれはハイと答えられるものである．しかし選択公理はかなり議論の余地ある主張であり，事実この公理を認めるか否かについて激しい論争があったことは第0章で述べた通りである．ここではラッセルが示した例を引き合いに出すにとめよう：

ラッセルの例 ここに無限足の靴の集合がある．これらの対から片方だけとり出して集合をつくることができる．それには例えば各対から右足用の靴を選び出してきてまとめればよい．しかし無限足の靴下の集合が与えられたときは，これらの対から片方だけとり出して集合をつくることは困難であろう．なぜならどのようにして片方を選ぶかわれわれにはその手段がないのである．そこで神様にお願いして各対から片方をとり出す一種の関数をつくってもらう．ここに天下り式に選択集合を受け取らざるを得ない一例をみるのである．▨

公理(IX)あるいは後出のその同等物を AC として引用することが多い．これは Axiom of Choice の頭文字である．

2.7 ツェルメロ・フレンケル集合論

以上で公理系の提示を終る．それらをここに一括して記す：

(I) (外延公理) $\forall x\forall y[x=y \leftrightarrow \forall z(z\in x \leftrightarrow z\in y)]$

(II) (対公理) $\forall x\forall y\exists z\forall t(t\in z \leftrightarrow t=x\vee t=y)$

(III) (和集合公理) $\forall x\exists y\forall z[z\in y \leftrightarrow \exists u(u\in x\wedge z\in u)]$

(IV) (巾集合公理) $\forall x\exists y\forall z(z\in y \leftrightarrow z\subseteq x)$

(V) (空集合公理) $\exists x\forall y(y\notin x) \qquad (\forall y(y\notin\phi))$

(VI) (無限公理) $\exists a[\phi\in a\wedge\forall x(x\in a\to x\cup\{x\}\in a)]$

(VII) (置換公理図式) $\forall x\forall y\forall z[\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,z)\to y=z] \to \forall u\exists v\forall y[y\in v\leftrightarrow\exists x\in u\varphi(x,y)]$

((VII′) (分出公理図式) $\forall u\exists v\forall x(x\in v\leftrightarrow x\in u\wedge\phi(x))$)

(VIII) (正則性公理) $\forall a[a\neq\phi\to\exists x\in a(x\cap a=\phi)]$

(IX) (選択公理) $\forall z[\forall x(x\in z\to x\neq\phi)\wedge\forall x\forall y(x,y\in z\wedge x\neq y \to x\cap y=\phi)\to\exists u\forall x(x\in z\to\exists t(u\cap x=\{t\}))]$

ここで，$\varphi(x,y)$ は z, v を含まない $\mathcal{L}$ の論理式，$\phi(x)$ は v を含まない $\mathcal{L}$ の論理式である．

公理系(I)〜(VIII) を ZF

公理系(I)〜(IX) を ZFC

で表わし，**ツェルメロ・フレンケル集合論**(略して ZF 集合論)という†. C は選択公理を含むことを表わし，その意味で ZFC の代わりに強調して ZF+AC と書き表わすことがある.

公理系(I)〜(VI)，(VII′)，(VIII)を Z で，(I)〜(VI)，(VII′)，(VIII)，(IX)を ZC で表わし**ツェルメロ集合論**と呼ぶ.

以下本書では ZF または ZFC において議論を進める. したがってわれわれの集合たちの宇宙(後に V として定義される)は ZF または ZFC をみたしているのである. 特に選択公理を必要とするときは (AC) を明記するか "ZFC で" とかき，また選択公理を必要としないことを強調するときは "ZF で" とことわり書きする. あるいは，論理式 φ が ZF または ZFC で証明されることを強調したいときは次のような記法を用いることもある:

$$\mathrm{ZF}\vdash\varphi \quad \text{または} \quad \mathrm{ZFC}\vdash\varphi^{\dagger\dagger}.$$

さてわれわれの公理系 ZFC は安全であろうか. われわれは ZFC から矛盾が生じないことを証明することはできないが，少なくとも素朴集合論において今までに知られている逆理はこれを避けることができる. 例えばラッセルの逆理については次節に述べられる. その論拠は $\{x|x\notin x\}$ が集合**ではない**集りであるということである. このような集合とは認められない集りを集合と区別して**クラス**と呼ぶ. 集合のみならずクラスも合せて取り扱うことは集合論の展開をスムーズにする. 節を改めて論じよう.

2.8 クラス

今までに述べてきたように ZF 集合論では対象としては集合のみがあるだけであるが，いろいろ議論する上ですべての集合を集めたもののような集合とは認められないものも "集り" として把握し取り扱うのが便利である. そこで非公式的ではあるがクラス概念を導入する. (集合のほかに初めから正式に未定義術語としてクラスを言語の中へ入れ 2-階述語論理にもとづいて理論を展開する方法もある. ゲーデル[21]はこの方式に従っている.)

† 必要なときは選択公理をもつ(あるいはもたない) ZF 集合論という.

†† この際，実際の証明には ZF(C) の**有限個**の公理のみを必要とするだけである. このことは以後ことわりなしに使うことがある.

定義 2.8.1　$\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ は $x, x_1, \cdots, x_n$ 以外に自由変数を含まない $\mathcal{L}$ の論理式とし，$a_1, \cdots, a_n$ を(任意特定の)集合とする．このとき

(1)　$$\{x|\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)\}$$

を φ によって $a_1, \cdots, a_n$ から定義された**クラス**といい，$a_1, \cdots, a_n$ を**パラメタ**という．(省略して，φ によって定義されたクラス，更に省略して単に**クラス**ともいう．$n=0$ のとき，このことを強調したいならば，パラメタなしに定義されたクラスともいう．) ▨

クラス(1)の直観的意味は "$\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)$ が成り立つような集合 x たちをすべて集めたもの" を表わすということである．この直観的意味に従って，集合 a が $\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)$ をみたすとき，すなわち $\varphi(a, a_1, \cdots, a_n)$ が成り立つとき，a はクラス(1)の**要素**であるといい

(2)　$$a \in \{x|\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)\}$$

とかく．便宜上，クラスを表わす文字

(3)　$$A, B, \cdots, X, Y, \cdots$$

を導入する．(大文字を用いる．) クラス A が**存在する**とは A をある集合 $a_1, \cdots, a_n$ から定義する論理式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ が存在すること ($n=0$ でもよい)である．非公式的ではあるがクラスをも集合論の対象として取り扱う上は，クラスたちの間に**相等関係**を定めておかねばならない．そこで次の定義をおく．

定義 2.8.2　A が φ によって $a_1, \cdots, a_n$ から，B が ψ によって $b_1, \cdots, b_m$ から定義されたクラスであるとき

(4)　$$A=B \equiv \forall x[\varphi(x, a_1, \cdots, a_n) \leftrightarrow \psi(x, b_1, \cdots, b_m)]$$

と定める．▨

上の A に対しこの等号の意味で

$$A=\{x|\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)\}$$

とかくことができる．また集合 a に対し $a \in A$ とは $\varphi(a, a_1, \cdots, a_n)$ が成り立つことである．

クラス文字 A, B に対し $x \in A$ や $A=B$ 自身は厳密には今までの集合論言語 $\mathcal{L}$ の論理式ではない．しかしこのようなものも論理式様に取り扱って

(5)　$$x \in A \vee x \in B, \qquad \forall x(x \in A \to x \in B)$$

のような式を考えると便利である．A や B を定義する $\mathcal{L}$ の論理式に立ち返ればそれらを $\mathcal{L}$ の論理式に書きかえることができることは明らかであるが(5)のような記法がよりよい見通しを与えることも多い．よってわれわれはクラス文

字(3)に対し $x \in A$ などを原子論理式とみなしそれらに次々に $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall x$, $\exists x$ を施した(5)のような拡張した論理式を取り扱うことにする．ただしクラス文字を

$$\exists X, \ \forall X$$

のような束縛変数としては**用いない**．したがってあくまでもクラス文字は $\mathcal{L}$ の論理式から定義された(任意)特定のクラスを表わすものである．このように約束しておけば拡張された意味での論理式は，必要ならばいつでも $\mathcal{L}$ の論理式に書きかえることができるわけで $\mathcal{L}$ の論理式と考えて差し支えない．さて定義によって，2つのクラス A, B に対し

$$A=B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

が成り立つ．これは外延公理と同じ形をもっている．またクラス A に対し

$$\forall x(x \in A \leftrightarrow \phi(x, b_1, \cdots, b_m))$$

が成り立てば $A=\{x|\phi(x, b_1, \cdots, b_m)\}$ である．

例 1. $A=\{x|x=x \vee x \in a\}$, $B=\{x|x=x \vee b \in x\}$ ならば，$A=B$ である．▨

以下では混乱の恐れがないときは，$\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ に対し($n=0$ でなくても) $x_1, \cdots, x_n$ を省略して $\varphi(x)$ とかき(既に置換公理導入に際し類似なことを行なった)，(1)も

$$\{x|\varphi(x)\}$$

と略記する．この場合，適当なパラメタ $a_1, \cdots, a_n$ が考えられているとするのである．このようなルーズな記法は一般によく用いられる．

さて $\varphi(x)$ と集合 a が与えられたとき，分出公理によって

$$(6) \qquad \forall x(x \in b \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x))$$

なる集合 b が(一意的に)定まる．この b を

$$b=\{x \in a|\varphi(x)\}$$

で表わした．ところでクラスの相等の定義によると(6)から

$$\{x|x \in b\}=\{x|x \in a \wedge \varphi(x)\}$$

が導かれる．左辺の直観的意味は集合 b そのものにほかならない．よって次の定義をもうける：

定義 2.8.3 $\mathcal{L}$ の論理式 $\varphi(x)$ と集合 a が与えられたとき，クラス $\{x|x \in a \wedge \varphi(x)\}$ と集合 $\{x \in a|\varphi(x)\}$ とは等しいと定める：

$$\{x|x \in a \wedge \varphi(x)\}=\{x \in a|\varphi(x)\}. \ ▨$$

定理 2.8.4 集合はクラスである．

証明　uを集合とし，$\psi(x, x_1) \equiv x \in x_1$ とする．分出公理により

$$v = \{x \in u \mid \psi(x, u)\} = \{x \in u \mid x \in u\}$$

なる集合vが存在する．外延公理により $v=u$．よって **2.8.2**，**2.8.3** から

$$u = v = \{x \in u \mid x \in u\} = \{x \mid x \in u \wedge x \in u\} = \{x \mid x \in u\} = \{x \mid \psi(x, u)\}.$$

ゆえに，uは論理式 $\psi(x, x_1)$ によりuから定義されたクラスであり，しかも

$$u = \{x \mid x \in u\}$$

なることも導かれた．▒

定義 2.8.5　集合でないクラスを**固有クラス**という．▒

クラスを集合論の対象にするから，クラスの間にも集合算を定義するのが便利である．よく知られた ∪，∩，− などの集合演算は上の用法を用いて次のように定義される：

(7)　　$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

(8)　　$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

(9)　　$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$，$-B = \{x \mid x \notin B\}$

また

$$A \subseteq B \equiv \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

と定義し，クラス A, B に対し $A \subseteq B$ が成り立つとき A は B の**部分クラス**であるという．容易にわかるように

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \rightarrow A = B$$

である．

問 1.　u, v が集合のとき，1)　**2.5** で定義された集合としての共通部分 $u \cap v$ と(8)によるクラスとしての $u \cap v$ とは一致することを示せ．2)　同様に **2.3** で定義された集合としての和 $u \cup v$ と(7)によるクラスとしての $u \cup v$ は一致することを示せ．▒

定義 2.8.6　$V = \{x \mid x = x\}$．V を ZF 集合論の**宇宙**という．▒

定理 2.8.7　V はすべての集合たちからなるクラスである．

証明　等号公理により $\forall x(x = x)$．よって $\forall x(x \in V)$．▒

定理 2.8.8　任意のクラスは V の部分クラスである．

問 2.　**2.8.8** を証明せよ．▒

定理 2.8.9　V は固有クラスである．

証明　もし V がある集合aに等しければ，$a \in a$ となり **2.6.1** に反す．▒

ここでラッセルの逆理が避けられていることをみてみよう．ラッセルの逆理は結局 “$\{x \mid x \notin x\}$ を集合とすれば矛盾が生ずる” ということであった．われわれの ZF 集合論では **2.6.1** により $\forall x(x \notin x)$ であるから $V = \{x \mid x \notin x\}$ となる．しかし V は前定理により集合でない．よって逆理は回避されたわけで

ある．

次の定理は重要である．

定理 2.8.10 集合の部分クラスは集合である．

証明 a を集合とし B を a の部分クラスとする：$B \subseteq a$．よって

(10) $$\forall x(x \in B \rightarrow x \in a).$$

B が $\mathcal{L}$ の論理式 φ によって定義されたクラスならば，$B=\{x|\varphi(x)\}$ であるから(10)によって $\varphi(x) \leftrightarrow x \in a \wedge \varphi(x)$ が成り立つ．したがって **2.8.2** および **2.8.3** によって

$$B=\{x|x \in a \wedge \varphi(x)\}=\{x \in a|\varphi(x)\}$$

となり B は集合である．▨

問 3. A が固有クラスで $A \subseteq B$ ならば，B も固有クラスである．

問 4. A が固有クラスならば，任意の集合 u に対し $A-u$ は固有クラスである．▨

2.9 関係と関数

これらの概念は第1章と重なる面もあるが，重複をいとわず述べることにする．ここではクラスに対し定義するので，その意味で一般化になっている．集合はクラスであるから諸概念をクラスに対し定義しておけば，自動的に集合に対してそれらの概念が通用するという意味で一般化になっているのである．しかし概念の本質は，第1章におけるものと変わりない．

定義 2.9.1 $A \times B=\{z|\exists x, y[x \in A \wedge y \in B \wedge z=\langle x, y\rangle]\}$．これを A と B の**直積**という．右辺を $\{\langle x, y\rangle|x \in A \wedge y \in B\}$ と略記することが多い．▨

定理 2.9.2 u, v が集合ならば†，$u \times v$ は集合である．

証明 定義によって $u \times v=\{\langle x, y\rangle|x \in u \wedge y \in v\}$．$\langle x, y\rangle=\{\{x\}, \{x, y\}\}$ であるからこれは $\mathcal{P}^2(u \cup v)$ の要素である(問1)．したがって $u \times v$ は**集合** $\mathcal{P}^2(u \cup v)$ の部分クラスであり **2.8.10** により，$u \times v$ 自身集合である．▨

問 1. $x, y \in u$ ならば $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}^2(u)$ である．▨

定義 2.9.3 直積 $V \times V$ の部分クラスを**関係**という．$A \times B$ の部分クラスを A, B 上の関係，$A \times A$ の部分クラスを A 上の関係という．R が関係で，$\langle x, y\rangle \in R$ のとき，xRy とかくこともある．▨

例 1. $\{\langle x, y\rangle|x \in A \wedge y \in A \wedge x=y\}=\{\langle x, x\rangle|x \in A\}$ を $A \times A$ の**対角線クラス**という．これは A 上の**相等関係**にほかならない．▨

† この前提は**強調**の意味でつけたものである．小文字は集合を表わす約束であるから，この前提は本来なら不要であるが，しばしばこのような前提をつける．

定理 2.9.4 集合 u, v 上の関係は集合である.

証明 2.9.2, 2.8.10 から直ちに従う. ▨

直積の概念は有限個のクラスの場合に拡張される. われわれは既に順序 n-組 $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ を定義した(**2.3.4**).

定義 2.9.5 $n\geq 2$ とし $A_1, \cdots, A_n$ がクラスのとき (i) n についての帰納法で $A_1\times\cdots\times A_n=A_1\times(A_2\times\cdots\times A_n)$ と定める. $A_1=\cdots=A_n$ ならば, $A_1\times\cdots\times A_n$ を A^n とかく. (ii) 直積 V^n の部分クラスを **n 項関係**という. $A_1, \cdots, A_n$ 上の n 項関係, A 上の n 項関係も **2.9.3** におけると同様に定義される. ▨

定義 2.9.6 クラス A に対し(必ずしも関係である必要はない)

(1) $\mathrm{Dom}(A)=\{x\mid \exists y(\langle x, y\rangle\in A)\}$ を A の**定義域**という.

(2) $\mathrm{Rng}(A)=\{y\mid \exists x(\langle x, y\rangle\in A)\}$ を A の**値クラス**という. もしこれが集合なら**値集合**という.

(3) R が関係のとき $R^{-1}=\{\langle x, y\rangle\mid\langle y, x\rangle\in R\}$ を R の**逆関係**という.

(4) R が関係, A がクラスのとき

$$R|A=\{\langle x, y\rangle\mid\langle x, y\rangle\in R\wedge x\in A\wedge y\in A\}=R\cap(A\times A)$$

を R の A への**制限**という. ▨

問 2. $\mathrm{Dom}(R^{-1})=\mathrm{Rng}(R)$, $\mathrm{Rng}(R^{-1})=\mathrm{Dom}(R)$.

問 3. u が集合ならば, $\mathrm{Dom}(u)$, $\mathrm{Rng}(u)$ は集合である. ▨

定義 2.9.7 クラス F が関係であってかつ条件

(5) $$\langle x, y\rangle\in F\wedge\langle x, z\rangle\in F\to y=z$$

をみたすならば, F を**クラス関数**という. 特に F が集合ならば**関数**という. 関数全体はクラスをなす. これを Func で表わす. また F がクラス関数であることを $\mathrm{Func}(F)$ で表わす. したがって

$$\mathrm{Func}=\{f\mid\mathrm{Func}(f)\}=\{f\mid f\subset V^2\wedge\forall x\forall y\forall z[\langle x, y\rangle\in f\wedge\langle x, z\rangle\in f \to y=z]\}.$$ ▨

記述の簡便のためにイオタ記号 ι を利用する. $\varphi(x)$ が $\mathcal{L}$ の論理式のとき

$$\iota x\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x) \text{ をみたす一意的な } x & \text{if} \quad \exists!x\varphi(x),\\ \phi & \text{ow.}\end{cases}$$

ここで ow は“そうでないとき”の意味とする.

定義 2.9.8 クラス F に対し(F はクラス関数でなくてもよい)

$$F`x=\iota y[\langle x, y\rangle\in F].$$

もし F がクラス関数で $x\in\mathrm{Dom}(F)$ ならば, $F`x$ は F の x における**値**であるという. クラス関数の値は必ず集合である. ▨

定義 2.9.9 F がクラス関数で A がクラスのとき

$$F{\restriction}A=\{\langle x, y\rangle \mid \langle x, y\rangle \in F \wedge x \in A\}$$

を F の A への**制限**という.

$$F``A=\mathrm{Rng}(F{\restriction}A)$$

は $F{\restriction}A$ の**値クラス**である. これは $\{F`x \mid x \in A\}$ と書き表わすことができ, クラス関数 F による A の**像**とも呼ばれる. ▨

F がクラス関数で, $\mathrm{Dom}(F)=A$, $\mathrm{Rng}(F)\subseteq B$ ならば

$$F\colon A \longrightarrow B$$

とかき, F は **A から B への**クラス関数(写像)という. 単に **A 上の**クラス関数ということもある. クラス関数に関し**単射** (1–1), **全射**(上への) および**全単射**(1–1 onto, **双射**)の概念は第1章におけると同様に定義される:

$\mathrm{Func}_1(F) \equiv \mathrm{Func}(F) \wedge \forall x \forall y(x, y \in \mathrm{Dom}(F) \wedge x \neq y \to F`x \neq F`y)$

$\mathrm{Func}_1=\{f \mid \mathrm{Func}_1(f)\}$ はクラスである.

$F\,\mathrm{Func}\,A \equiv \mathrm{Func}(F) \wedge \mathrm{Dom}(F)=A$

$F\,\mathrm{Func}_1\,A \equiv \mathrm{Func}_1(F) \wedge \mathrm{Dom}(F)=A$

$F\colon A \xrightarrow{1\text{-}1} B \equiv (F\colon A \longrightarrow B) \wedge \mathrm{Func}_1(F)$ ($\equiv F\colon A \longrightarrow B$ (単射))

$F\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{} B \equiv (F\colon A \longrightarrow B) \wedge \mathrm{Rng}(F)=B$ ($\equiv F\colon A \longrightarrow B$ (全射))

$F\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} B \equiv (F\colon A \xrightarrow{1\text{-}1} B) \wedge (F\colon A \xrightarrow[\text{onto}]{} B)$ ($\equiv F\colon A \longrightarrow B$ (全単射))

$F\colon A \longrightarrow B$ が全単射のとき $F^{-1}\colon B \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} A$ である. ここに F^{-1} は関係としての F の逆関係である. このとき

$$(F^{-1})`b=a \longleftrightarrow F`a=b.$$

問 4. Func_1 は固有クラスである. したがって Func もそうである. ▨

定理 2.9.10 u, v を集合とする. (i) クラス関数 $F\colon u \longrightarrow v$ は集合であり, したがってそれは関数である. (ii) u から v への関数全体のクラスは集合である. これを ${}^{u}v$ で表わす:

$${}^{u}v=\{f \mid f\colon u \longrightarrow v\}.$$

証明 (i) F は集合 $u\times v$ の部分クラスである. (ii) ${}^{u}v$ は集合 $\mathcal{P}(u\times v)$ の部分クラスである. ▨

次の定理はごく頻繁に使われるもので, 置換公理からの直接の帰結である:

定理 2.9.11 F がクラス関数で, u は $\mathrm{Dom}(F)$ に含まれる**集合**とする. このとき $F``u$ は集合である. したがって $F{\restriction}u$ は関数, $\bigcup F``u$ は集合である. $\bigcup F``u$ は $\bigcup\{F`x \mid x \in u\}$, $\bigcup_{x\in u} F`x$ などとも書かれる.

証明 F が φ によって定義されたクラスであれば,

$$F=\{\langle x, y\rangle|\varphi(x, y)\}, \qquad \forall x\forall y\forall z(\langle x, y\rangle\in F\wedge\langle x, z\rangle\in F\to y=z)$$

であるから，置換公理(**2.5** (1))の前提が満足される．よってその公理により $\forall y(y\in v\leftrightarrow\exists x\in u\varphi(x, y))$ なる集合 v が存在する．$v=F``u$ は明白．また $F\upharpoonright u\subseteq u\times F``u$ であるから $F\upharpoonright u$ は集合であり，したがってそれは関数である．さらに，$F``u$ が集合なることから $\bigcup F``u$ が集合であることは当然である(公理 III)．▨

このようにして，ある操作 $F`x$ が各 $x\in u$ について行われ，それが終了したところでそれらをまとめて一つの集合 $\{F`x|x\in u\}$ をつくることができ，そこからまたいろいろな操作(例えば $\bigcup\{F`x|x\in u\}$) によって新しい集合がつくられ，再びそれらをひとまとめの集合にすることができる… という次第である．それゆえ**置換公理**はある意味で“いろいろな操作をどこまでも続けていくことができる”ことの保証を言い言わしていると考えられる．

さて関数概念が導入されたので，ここで選択公理の別な形を一つ述べておこう．

定義 2.9.12 f が集合 w の**選択関数**であるとは

$$f\,\mathrm{Func}(w-\{\phi\})\wedge\forall x\in w-\{\phi\}\ (f`x\in x).$$

(IX′) すべての集合は選択関数をもつ:

$$\forall w\exists f(f\,\mathrm{Func}(w-\{\phi\})\wedge\forall x\in w-\{\phi\}\ (f`x\in x)). \text{ ▨}$$

注意 $w-\{\phi\}=\phi$ のときは $f=\phi$ がこの条件をみたす．

定理 2.9.13 $\mathrm{ZF}\vdash(\mathrm{IX})\leftrightarrow(\mathrm{IX}')$.

証明 (←) ZF+(IX′) で考える．(IX) を証明するために $\forall x(x\in z\to x\neq\phi)\wedge\forall x\forall y(x, y\in z\wedge x\neq y\to x\cap y=\phi)$ なる z をとる．(IX′) により z の選択関数 f が存在する．$z-\{\phi\}=z$ である．このとき $u=f``z$ は z に対する選択集合である．(→) ZF+(IX) で考える．任意に $w-\{\phi\}\neq\phi$ なる集合 w をとる．$z=\{\{x\}\times x|x\in w-\{\phi\}\}$ は集合であり(問5)，z の各要素は空でない集合でしかも2つずつを互いに素であるから，(IX)によって z の選択集合 u が存在する．

$$\langle x, y\rangle\in f\leftrightarrow\langle x, y\rangle\in(\{x\}\times x)\cap u$$

と定義すれば f は w の選択関数である．▨

問 5. $z=\{\{x\}\times x|x\in w\}$ は集合であることを示せ．▨

***n* 変数のクラス関数**: 論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ に対し

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)\wedge\varphi(x_1, \cdots, x_n, z)\to y=z$$

が成り立つとき $\varphi(x_1, \cdots, x_n, y)$ は直観的意味で n 変数 $x_1, \cdots, x_n$ の関数

を表わしている．そこで記号 F を導入して

$$(6)\quad F`\langle x_1,\cdots,x_n\rangle=\begin{cases}\iota y\varphi(x_1,\cdots,x_n,y) & \text{if}\quad \exists y\varphi(x_1,\cdots,x_n,y)\\ \phi & \text{ow}\end{cases}$$

と定める．したがって

$$F=\{\langle u,y\rangle\mid \exists x_1\cdots\exists x_n\exists y[u=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle\wedge\varphi(x_1,\cdots,x_n,y)]\}$$

である．F は今までのクラス関数であり，$F`u$ の引数 u へ $\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$ を代入した形で n 変数の関数が表わされているのである．

演習問題 II

1. 2.3 の(4)式 $t\in\{x_1,\cdots,x_n\}\leftrightarrow t=x_1\vee\cdots\vee t=x_n$ を証明せよ．

2. $\bigcup\{\{x_1,\cdots,x_n\}\}$ は何か．

3. **2.3.5** を証明せよ．

4. $A_1,\cdots,A_n$ がクラスのとき，それらの和 $A_1\cup\cdots\cup A_n$，共通部分 $A_1\cap\cdots\cap A_n$ を定義せよ．それらはそれぞれ $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ とも書かれる．

5. $y\cup z$ を和集合公理によらず **2.5** 例 1 のようにして直接定義できるか．

6. 集合 $u(\neq\phi)$ に対し $\bigcap u=\{t\mid\forall x\in u(t\in x)\}$ は集合であることを示せ．また $\bigcap\{x\}$, $\bigcap\{x,y\}$ は何か．もし $u=\phi$ ならば $\bigcap u$ は何か．

7. R,S が関係のとき $R\circ S$ を次のように定義し，R と S の**合成**という．

$$R\circ S=\{\langle x,y\rangle\mid\exists z(\langle x,z\rangle\in R\wedge\langle z,y\rangle\in S)\}.$$

明白に合成は関係である．これについて次を証明せよ．

1) $(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$　　2) $(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$

3) $(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$　　4) $(R\cap S)\circ T\subseteq(R\circ T)\cap(S\circ T)$

5) $(R\cap S)\circ T\neq\phi$ であって $(R\cap S)\circ T\neq(R\circ T)\cap(S\circ T)$ となる例をつくれ．

8. 次の諸公式を証明せよ．

1) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$　　2) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

3) $A\times B=\phi\leftrightarrow A=\phi\vee B=\phi$　　4) $A\cap B=\phi\leftrightarrow(A\times C)\cap(B\times C)=\phi$

5) $A\times A=B\times B\leftrightarrow A=B$　　6) $A\subseteq C\wedge B\subseteq D\leftrightarrow A\times B\subseteq C\times D$.

9. F,G がクラス関数で，$D=\mathrm{Dom}(F)\cap\mathrm{Dom}(G)$ であるとする．もし $F\restriction D=G\restriction D$ なら F,G は**両立する**という．

1) F,G が両立する $\leftrightarrow F\cup G$ がクラス関数である．

2) F,G が両立し，しかも両者とも単射であるとする．このとき $F\cup G$ が

単射であるための必要十分条件を求む．また $F \cup G$ が単射とならない例をつくれ．

10． $f: u \longrightarrow v$ が全単射ならば，$x \subseteq u$ に対し $g`x = f``x$ によって定義される関数 $g: \mathcal{P}(u) \longrightarrow \mathcal{P}(v)$ は全単射である．

3

順 序 数 論

本章は，順序数論を建設することが目的である．順序数の概念は，素朴集合論におけるものと異なって整列性の概念とは独立に定義されるが，その帰結として順序数が整列集合と密接に関係するもので従来の定義から欠陥を除いたものになっていることが導かれる．また，集合論において最も基本的な手法である超限帰納法による証明・定義が詳述される．まず順序構造から始めよう．

3.1 順序の概念

定義 3.1.1 （反射型順序） クラス A 上の関係 R が条件

1） $\forall x \in A\ (xRx)$ （反射法則）

2） $\forall x, y \in A\ (xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$ [†] （反対称法則）

3） $\forall x, y, z \in A\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$ （推移法則）

をみたすとき， R は A 上の(反射型)**順序**である， R は A を**順序づける**といい，xRy の代わりに

$$x \leq_R y$$

とかくことが多い．（混乱の恐れがなければ単に $x \leq y$ とかいてもよい．）A を R に関する**順序クラス**（A が集合なら**順序集合**）という．また

（1）　$$x <_R y \equiv x \leq_R y \wedge x \neq y$$

と定義する．明白に

（2）　$$\forall x \in A \neg (x <_R x). \quad ▨$$

任意の関係 R に対し

$$\mathrm{Fld}(R) = \{x \mid \exists y[\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R]\}$$

---

† $\forall x \in A \forall y \in A$ を $\forall x, y \in A$ と略記する．

とおき，R の**フィールド**という．**3.1.1** の R については $\mathrm{Fld}(R)=A$ である．

定義 3.1.2 （**非反射型順序**） クラス A 上の関係 R が条件

1) $\forall x\in A\neg(xRx)$ （非反射法則）

2) $\forall x,y,z\in A(xRy\wedge yRz\to xRz)$

をみたすならば，R は A 上の(非反射型)**順序**である，R は A を**順序づける**といい，xRy の代わりに

$$x<_R y$$

とかくことが多い．また

$$x\leq_R y\equiv x<_R y\vee(x=y\wedge x\in A) \tag{3}$$

と定義する．このとき $\mathrm{Fld}(\leq_R)=A$ である． ▒

問 1. 関係 R が推移法則をみたすための必要十分条件は $R\circ R\subseteq R$ が成り立つことである． ▒

さて **3.1.1** に関する (1) $x<_R y$ は **3.1.2** の意味で非反射型順序であり，**3.1.2** に関する (3) $x\leq_R y$ は **3.1.1** の意味で反射型順序である．したがってどちらから出発しても同様に論ずることができるので，今後は R が A 上の順序であるというときには上のどちらか一方で定義されているものとし，説明なしに $\leq_R$ や $<_R$ を用いることにする．

例 1. u が集合のとき，

$$r=\{\langle x,y\rangle\,|\,x\subseteq y\wedge x,y\in u\}$$

とすれば，r は u 上の順序である．これを**包含関係の順序**といい $\subseteq$ で表わす． ▒

R が A 上の順序で $B\subset A$ のとき $R|B$ は B 上の順序である．このとき，$R|B$ が B を順序づけるという代わりに単に R は B を順序づけるとか，B は R に関し順序クラスであると略称する．

定義 3.1.3 A 上の順序 R が条件

$$\forall x,y\in A(x<_R y\vee x=y\vee y<_R x) \tag{4}$$

または同等に

$$\forall x,y\in A(x\leq_R y\vee y\leq_R x) \tag{5}$$

をみたすならば，R は A 上の**全順序**である，R は A を**全順序づける**という．A は R に関し**全順序クラス**(A が集合なら**全順序集合**)であるという． ▒

さらに，いろいろな概念を定義しよう．R は A 上の順序とする．$a\in A$ のとき，

$$\mathrm{Seg}_R(a)=\{x\,|\,x<_R a\}$$

を a による R-**始切片**という．（これは必ずしも集合とはいえない．A が集合ならむろん R-始切片は集合である．その場合，R 自身集合である．）

対

$$\langle A, R\rangle$$

を**順序構造**（もし R が全順序ならば，**全順序構造**）という．A が固有クラスのときは，対 $\langle A, R\rangle$ を第2章におけるようには ZF で定義することができない．しかし，**便法**として A が固有クラスのときも $\langle A, R\rangle$ とかいて，（全）順序クラス構造と呼ぶことにする．これは“R が A 上の（全）順序である”ことの略記に過ぎない．また $\langle A, R\rangle$ を単に（全）順序クラスまたは A が集合なら（全）順序集合と略称する．通常 A が（全）順序集合（あるいはクラス）であるというときは，ある関係 R について $\langle A, R\rangle$ が（全）順序構造をなすときにいう．

(6)　$$a \in A \wedge \forall x \in A \neg(x <_R a)$$

なる要素 a が存在するならば，a は A の R-**極小元**であるという．（$\leq_R$-極小元，$<_R$-極小元などと称してもよい．）もし

(7)　$$a \in A \wedge \forall x \in A(a \leq_R x)$$

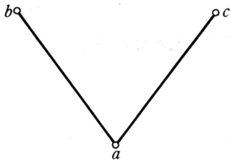
なる要素 a が存在するならば，a は A の R-**最小元**であるという．極小元は存在しても一意的とは限らないが，最小元は存在すれば一意的に定まる．**極大元**と**最大元**の概念も同様に定義される．

与えられた $a, b \in A$ に対し $a <_R b$ であるが，$a <_R x <_R b$ なる $x \in A$ が存在しないならば，b は a の R-**直後元**，a は b の R-**直前元**という．（混乱の恐れがなければ単に直後元，直前元という．）理解を助ける手段として第1章におけるように $x <_R y$ なることを



で表わすと便利である．

例 2.　$R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle\}$ は $A = \{a, b, c\}$ 上の（非反射型）順序で，その（ハッセ）ダイヤグラムは



a は b, c の直前元である．▒

定義 3.1.4 $\langle A, R\rangle$ を全順序構造とし $B\subseteq A$ とする．

$$\forall x\in B\,(x\leq_R a)$$

なる $a\in A$ があれば，B は A で(上に) R-**有界**であるという，a は B の一つの**上界**であるという．そうでないとき，B は A で R-有界でない，または B は A で R-**共終**であるという．混乱の恐れがなければ単に有界，共終という．▒

共終概念は後に利用される．

定義 3.1.5 2つの順序構造 $\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$ が与えられているとき，写像 $F: A\longrightarrow B$ が

(8) $$x<_R y\rightarrow F`x<_S F`y$$

をみたすならば，F は**順序保存**であるという．F が全単射であって条件

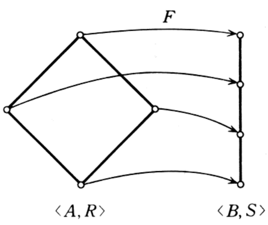
(9) $$x<_R y\leftrightarrow F`x<_S F`y$$

をみたすならば，F は2構造間の**同型写像**(**対応**)であるという．またそのとき，構造 $\langle A, R\rangle$ と $\langle B, S\rangle$ は**同型**であるといい

$$\langle A, R\rangle\cong\langle B, S\rangle$$

で表わす．強調して**順序同型**であるともいう†．▒

順序同型の直観的意味は明白であろう．その定義で(9)を(8)でおきかえることができないことは次の例でわかる：



† 特に全順序構造の場合，同型の代わりに**相似**ということもある．

また，順序同型の定義で F が必ずしも全射でない場合（すなわち F が1-1で(9)をみたすならば），F は $\langle A, R\rangle$ から $\langle B, S\rangle$ への（あるいは簡単に A から B への）**埋込み**であるという．

定理 3.1.6　$\langle u, r\rangle$ が順序集合のとき，r が非反射型ならば

$$\langle u, r\rangle \cong \langle v, \subset\rangle$$

なる集合 v が存在する．また r が反射型ならば

$$\langle u, r\rangle \cong \langle v, \subseteq\rangle$$

なる集合 v が存在する．

証明　$v=\{\mathrm{Seg}_r(a) \mid a \in u\}$ とすれば，$v \in \mathcal{P}(u)$ なるゆえ v は集合である．このとき r が非反射型なら $\langle u, r\rangle \cong \langle v, \subset\rangle$ となる．もし r が反射型ならば $\langle u, r\rangle \cong \langle v, \subseteq\rangle$ となる．▒

この定理を順序集合の**表現定理**という．

A 上の関係 R が反射法則と推移法則をみたすならば，R は A 上の**擬順序**という．この概念は近時，記述集合論でその重要性を再認識されている．R が A 上の擬順序のとき，$a, b \in A$ に対し

$$a \sim_R b \ \equiv\ a \leq_R b \wedge b \leq_R a$$

と定義すれば，$\sim_R$ は**同値関係**である：

1°）　$\forall x \in A(x \sim_R x)$　　（反射法則）

2°）　$\forall x, y \in A(x \sim_R y \to y \sim_R x)$　　（対称法則）

3°）　$\forall x, y, z \in A(x \sim_R y \wedge y \sim_R z \to x \sim_R z)$　　（推移法則）

このとき $a \in A$ に対し

$$[a]_R = \{x \mid x \sim_R a\}\qquad \text{（混乱の恐れがなければ添字 } R \text{ を省く）}$$

と定義し，a の $\sim_R$ に関する**同値類**という．同値類は一般に集合とは限らない．もし $\sim_R$ に関する**どの同値類も集合である**ならば，クラス $\{[a]_R \mid a \in A\}$ の上に自然な順序 $\leq_{R^*}$ を定義することができる．それには

(10)　$$[a] \leq_{R^*} [b] \ \equiv\ a \leq_R b$$

と定義すればよい．正確には

$$R^* = \{\langle [a], [b]\rangle \mid a \leq_R b\}$$

であるがこのことを(10)で表わす．定義(10)が合理的であることは，それが $[a], [b]$ からの“代表元”の選び方に関係しないことから明白である：

(11)　$$x \in [a] \wedge y \in [b] \to (a \leq_R b \leftrightarrow x \leq_R y).$$

(11′)　$$x \sim_R a \wedge y \sim_R b \to (a \leq_R b \leftrightarrow x \leq_R y).$$

問 2.　(11)を証明せよ．

問 3. R_1, R_2 が A 上の順序ならば，$R_1 \cap R_2$ は A 上の順序である．

問 4. R_1, R_2 が A 上の全順序なるとき，$R_1 \cap R_2$ は全順序か． ▒

3.2 整列順序

本節では，これからの議論において基本的役割を演ずる整列順序について述べる．

定義 3.2.1 R はクラス A 上の全順序とする．もし

1°) A のどの空でない部分**集合**も R-最小元をもつ：

$$\forall u[u \subseteq A \wedge u \neq \phi \rightarrow \exists x \in u \forall y \in u(x \leq_R y)],$$

2°) どの R-始切片も集合である：$\forall a \in A \exists u(\mathrm{Seg}_R(a) \subseteq u)$

なる条件がみたされるならば，R は A を**整列する**，R は A 上の**整列順序**である，A は R に関する**整列クラス**(A が集合ならば，**整列集合**)であるという．前節におけるように便法 $\langle A, R\rangle$ を用い，これを整列クラス(A が集合なら整列集合)と呼ぶ†． ▒

上の定義で条件 1°) が，“どの部分クラスも” となっていないことに注意．もしそのようになっていれば，われわれの集合論言語 $\mathcal{L}$ で記述することができない概念になってしまう．また条件 2°)は，A 自身が集合なら不要である．しかし，この条件のおかげで “A の**どの部分クラス**も R-最小元をもつ” ことが証明できる．後者は ZF 集合論における**超定理**——すなわち ZF 集合論の無限個の定理を超理論の言葉で一挙に記述したもの——である††．両者の相違に注意されたい．

定理 3.2.2 $\langle A, R\rangle$ が整列クラスで $\varphi(x)$ が $\mathcal{L}$ の論理式であるとき，

(i) **最小元原理** クラス $\{x \in A | \varphi(x)\}$ は空でなければ R-最小元をもつ．換言すれば，A の任意の空でない部分クラスは R-最小元をもつ．

(ii) **帰納法原理** $\forall x \in A[\forall y(y <_R x \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \varphi(x)] \rightarrow \forall x \in A \varphi(x)$.

証明 (i) $B = \{x \in A | \varphi(x)\}$ とおく．$B \neq \phi$ とすると $b \in B$ なる要素 b がある．条件 2°)により $\{x | x <_R b\}$ は集合であるから，これを u とおく．$u \cap B = \phi$ なら，b は B の R-最小元である．$u \cap B \neq \phi$ ならこれは A の空でない部

---

† 通常，集合 A が**整列集合**であるとは，A が**ある**順序によって整列されているときをいう．

†† クラスに関する定理(定義)はすべて超定理(超定義)である．それらは $\mathcal{L}$ の1個の論理式として記述することができない．これに反し例えば **3.1.6** は ZF 集合論の定理である．

分集合であるから1°)によって $u\cap B$ は R-最小元 a をもつ．a は B の R-最小元である．

（ii） 前提を仮定し $\neg\forall x\in A\varphi(x)$ であるとする．よって $\{x\in A|\neg\varphi(x)\}$ は，空でない A の部分クラスとなり(i)によって R-最小元をもつ．それを a とすれば $\neg\varphi(a)$．しかし，最小性から $\forall y\in A(y<_R a\rightarrow\varphi(y))$，したがって，仮定により $\varphi(a)$ でなければならない．不合理．ゆえに $\forall x\in A\varphi(x)$．▨

この定理は，後の超限帰納法の原形であり大切な性質である．未だ具体的な集合があまり定義されていないので，順序集合や整列集合の典型的な例を示すことができない．実例は議論が進むにしたがって次第に現われてくるであろう．自明なものとして

例 1. 空集合 ϕ は整列集合である．なぜなら，まず ϕ $(\subseteq\phi\times\phi)$ は ϕ 上の順序である．またこれは **3.2.1** の 1°)，2°)を自明的にみたす．ϕ は空でない部分集合をもたないからである．▨

以下で整列クラス(集合)に関する基本性質を調べる．

定理 3.2.3 整列クラスの部分クラスは整列クラスである．したがって，その部分集合は整列集合である．

証明 $\langle A, R\rangle$ を整列クラスとし $B\subset A$ とする．$R'=R|B$ は B 上の全順序で **3.2.1** の 2°)をみたす．$\langle B, R'\rangle$ が条件 1°)をみたすことは，B の部分集合が A の部分集合であることから明白．ゆえに $\langle B, R'\rangle$ は整列クラスである．▨

この証明において，“B は A と同じ順序によって整列される”という．特に $\langle A, R\rangle$ の任意の R-始切片は A と同じ順序に関し整列集合である．よって以下では，始切片は親と同じ順序についての整列集合とみなす．

定理 3.2.4 $\langle A, R\rangle$ を整列クラスとする．$F: A\longrightarrow A$ が順序保存ならば

（1） $$\forall x\in A(x\leq_R F`x)$$

証明 (1)が成立しないとすれば $a\leq_R F`a$ すなわち $F`a<_R a$ なる要素 $a\in A$ がある．よって $u=\{x|x\leq_R a\wedge F`x<_R x\}$ は A の空でない部分集合であるから u の中に R-最小元 b がある．これに対し明白に

（2） $$F`b<_R b$$

b の最大性から(2)によって $F`(F`b)\nless_R F`b$．しかし $F$ の順序保存性から(2)によって $F`(F`b)<_R F`b$ でなければならない．不合理．▨

補題 3.2.5 整列集合の始切片はもとの集合と同型でない．

証明 $\langle u, r\rangle$ を整列集合とし，v をその任意の始切片とする．よって，ある

$a \in u$ に対し $v = \mathrm{Seg}_r(a)$．もし $\langle u, r\rangle \cong \langle v, r|v\rangle$ であるとすれば，その同型対応を f とするとき，f は順序保存であるから **3.2.4** により $a \leq_r f`a$．しかし $f`a \in v$ であるから $f`a <_r a$．不合理．ゆえに $\langle v, r|v\rangle$ は $\langle u, r\rangle$ と同型でない．▨

定理 3.2.6 整列クラスの異なる2つの始切片は同型でない．

証明 $\mathrm{Seg}_R(a)$, $\mathrm{Seg}_R(b)$ を整列クラス $\langle A, R\rangle$ の異なる2始切片とする．よって $a \neq b$．$a <_R b$ と考えてよい．そのとき $\mathrm{Seg}_R(a)$ は整列集合 $\mathrm{Seg}_R(b)$ の始切片となるから **3.2.5** によりそれらは同型でない．▨

定理 3.2.7 $\langle A, R\rangle$, $\langle B, S\rangle$ が整列クラスでそれらが同型ならば，この同型写像はただ一つしかない．

証明 $F: A \longrightarrow B$ と $G: A \longrightarrow B$ が共に $\langle A, R\rangle$ と $\langle B, S\rangle$ の同型写像で，$F \neq G$ とする．したがって $F`a \neq G`a$ なる $a \in A$ がある．$F`a = b$, $G`a = b'$ とおく．$b <_S b'$ と仮定してよい．このとき

$$F \circ G^{-1}: B \longrightarrow B$$

は順序保存であるから，**3.2.4** により

$$b' \leq_S (F \circ G^{-1})`b' = F`a = b$$

これは不合理．ゆえに $F = G$ でなければならない．▨

定理 3.2.8 2つの整列集合 $\langle u, r\rangle$, $\langle v, s\rangle$ が与えられているとき，もし $\langle u, r\rangle$ の任意の始切片が $\langle v, s\rangle$ のある始切片に同型であれば，$\langle u, r\rangle$ は $\langle v, s\rangle$ またはそのある始切片に同型である．

証明 $$f = \{\langle x, y\rangle \in u \times v \mid \mathrm{Seg}_r(x) \cong \mathrm{Seg}_s(y)\}$$

と定義する．f が u から v への順序保存写像であることを示そう．まず $\langle x, y\rangle$, $\langle x, z\rangle \in f$ ならば $\mathrm{Seg}_s(y) \cong \mathrm{Seg}_s(z)$ となるから **3.2.6** により $y = z$ でなければならない．よって f は部分関数である．そこで任意に $x \in u$ をとる．仮定により $\mathrm{Seg}_r(x) \cong \mathrm{Seg}_s(y)$ なる $y \in v$ がある．よって $\langle x, y\rangle \in f$，したがって $x \in \mathrm{Dom}(f)$．ゆえに $\mathrm{Dom}(f) = u$．f が順序保存であることを示すために，$x <_r x'$ なる $x, x' \in u$ をとる．$\mathrm{Seg}_r(x) \cong \mathrm{Seg}_s(f`x)$, $\mathrm{Seg}_r(x') \cong \mathrm{Seg}_s(f`x')$ であるから，もし $f`x' \leq_s f`x$ なら $\mathrm{Seg}_r(x')$ が $\mathrm{Seg}_r(x)$ またはそのある始切片に同型となる．ゆえに $x' \leq_r x$ となって不合理．よって $f`x <_s f`x'$ でなければならない．これで $f: u \longrightarrow v$ なることと f の順序保存性とが証明された．定理の結論を導くために次の関係を示す：

（1） $$y \in \mathrm{Rng}(f) \wedge y' <_s y \rightarrow y' \in \mathrm{Rng}(f).$$

$f`x = y$ とすれば，$\mathrm{Seg}_r(x) \cong \mathrm{Seg}_s(y)$．$y' <_s y$ より $\mathrm{Seg}_r(x') \cong \mathrm{Seg}_r(x)$ なる

x' $(<_r x)$ が存在する．よって $f`x'=y'$，したがって $y' \in \mathrm{Rng}(f)$．

f が全射でなければ，y_0 を $v-\mathrm{Rng}(f)$ の $<_s$-最小元とすると，y_0 の性質と上の(1)とから $\mathrm{Rng}(f)=\mathrm{Seg}_s(y_0)$ となる．f は順序保存であるから f は $\langle u, r\rangle$ から $\langle \mathrm{Seg}_s(y_0), s\rangle$ の上への同型写像である．またもし f が全射ならば，明らかに $\langle u, r\rangle \cong \langle v, s\rangle$ である．これで定理が証明された．▒

上の定理から整列集合に関する非常に大切な次の性質を導くことができる：

定理 3.2.9 2つの整列集合が与えられると，それらは同型であるかまたは一方が他方のある始切片に同型であるかいずれかである．

証明 $\langle u, r\rangle$, $\langle v, s\rangle$ は同型でない整列集合であるとする．$\langle v, s\rangle$ が $\langle u, r\rangle$ のある始切片に同型ならば証明は終る．よって $\langle v, s\rangle$ は $\langle u, r\rangle$ のどの始切片とも同型でないとする．このとき $\langle u, r\rangle$ のどの始切片も $\langle v, s\rangle$ のある始切片に同型となる．なぜなら，もしそうでないとすれば，

$$\forall y \in v[\mathrm{Seg}_r(x) \not\cong \mathrm{Seg}_s(y)]$$

なる $<_r$-最小元 x が u の中にあるはずである．最小性から

$$x' <_r x \rightarrow \exists y' \in v[\mathrm{Seg}_r(x') \cong \mathrm{Seg}_s(y')].$$

よって $\langle \mathrm{Seg}_r(x), r\rangle$ と $\langle v, s\rangle$ へ **3.2.8** を適用すると

(2) $\langle \mathrm{Seg}_r(x), r\rangle \cong \langle v, s\rangle$ 　または　 (3) $\exists y \in v[\mathrm{Seg}_r(x) \cong \mathrm{Seg}_s(y)]$

となる．(2)は初めの仮定に反する．(3)は x の選び方に反する．よって $\langle u, r\rangle$ のどの始切片も $\langle v, s\rangle$ のある始切片に同型である．再び **3.2.8** を適用すると $\langle u, r\rangle \cong \langle v, s\rangle$ かまたは $\langle u, r\rangle \cong \langle \mathrm{Seg}_s(y), s\rangle$ なる $y \in v$ が存在するかいずれかであることがわかる．これで定理が証明された．▒

問 1. a が整列集合 $\langle u, r\rangle$ の要素で最大元でないなら，a の直後元が存在する．同様に，$v \subset u$ で v が有界ならば，v の直後元—— $\forall x \in v(x <_r b) \wedge \neg \exists y \in u(\forall x \in v(x <_r y) \wedge y <_r b)$ なる b ——が存在する．

問 2. u, v が互いに素な整列集合であれば，$u \cup v$ は整列集合である．▒

3.3 順序数

素朴集合論では，集合たちのある集りからある共通の性質を抽出して順序型なるものを考え，これによって順序数が定義されていた．第1章では順序数概念を省いてしまったので，ここに古典的定義を述べよう．

一つの全順序集合 u に同型な全順序集合は，同じ**順序型**をもつといい，これを u の順序型という．特に整列集合の順序型を**順序数**という．

この定義では順序型とは何であるかが明確でない．これを明確にし対象物と

して取り扱うためには，**同型なすべての**全順序集合を集めたものをもって一つの順序型と定めざるを得ない．したがってそれは固有クラスでなければならない．われわれは固有クラスを要素とする集りを対象外としているので，古典的定義に従うと，“順序数たちの集合”という概念が取り扱えなくなってしまう．このような困難が生じない定義を初めて与えたのは，若き時代のフォン・ノイマンである(1923年)．彼は順序型のある特別な代表である整列集合を選び，それらを順序数と考えた．すなわち順序数とは，**それより小さいすべての順序数の集合である**と定義したのである†．空集合 ϕ から出発しよう．まず，ϕ は順序数 0 と定める．次に，それまでにつくられた順序数からなる集合 $\{0\}$ は順序数 1 であるとし，$0<1$ であると定める．さらに，これまでにつくられた順序数からなる集合 $\{0, 1\}$ は順序数 2 で，今までのどの順序数よりも大きいと定める．以下，この操作を続ける：

(1) $$0=\phi,\ 1=\{0\},\ 2=\{0, 1\},\ 3=\{0, 1, 2\},\ \cdots$$

(2) $$0<1<2<3<\cdots$$

この手続きの次にはこれらすべての順序数からなる集合が得られるからこれを順序数 ω とし，ω は今までのどの順序数よりも大きいとする：

$$\omega=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

$$0<\omega,\ 1<\omega,\ 2<\omega,\ 3<\omega,\ \cdots$$

さらに，$\omega+1=\omega\cup\{\omega\}=\{0, 1, 2, 3, \cdots, \omega\}$，$\omega+2=(\omega+1)\cup\{\omega+1\}$，$\cdots$ とこの操作を続行する．これは直観的なアイデアであり厳密には $\cdots$ を避けなければならない．なぜなら，われわれはまだ超限帰納法というものをもち合せていないからである．フォン・ノイマンはこれを巧妙に切り抜けたが，彼の方法はやや遠回りであった．これに対し R. M. ロビンソンは1937年順序数の直接的定義に成功した．ロビンソンは $\in$ と $=$ の簡単な使用によって，順序数を一度に定義してしまったのである．

上の特殊例でわかるように，2つの順序数 α, β の間の順序関係 $<$ は所属関係 $\in$ と一致していることが読みとれるであろう．すなわち

$$\alpha<\beta \leftrightarrow \alpha\in\beta.$$

このことから順序数は $\in$ に関して整列されていると考えられる．いま

$$E=\{\langle x, y\rangle \mid x\in y\}$$

† カントルは“順序数 α はそれに先立つすべての要素からなる系列の型であることがすぐわかる”といっている[25, p. 124]．思想は同様であるがフォン・ノイマンは“系列の型”などという曖昧なことをいっていない．

と定義する．E は固有クラスである．今後混乱の恐れのないときは，E の代わりに $\in$ そのものを代用することにする．したがってクラス X に対し $\in|X$ は関係 E の X への制限を表わしている：

$$\in|X=\{\langle x, y\rangle | x\in y\wedge x, y\in X\}.$$

さらにこのような制限もまぎらわしくないときには，単に $\in$ とかくことがある．例えば順序クラス $\langle X, \in|X\rangle$ は，簡単に $\langle X, \in\rangle$ とかく．強調するときは前者の記法に従う．さてクラス X に対し

$$\mathrm{Conn}(X)\equiv\forall x, y\in X\,(x\in y\vee x=y\vee y\in x)^{\dagger}$$

と定義する．Conn(X) が成り立つことは，(非反射型)順序クラス $\langle X, \in\rangle$ が**全順序クラスをなす**ことにほかならない．

定義 3.3.1 クラス A が**推移的**であるとは

(3) $$\forall x, y\,(x\in A\wedge y\in x\rightarrow y\in A)$$

が成り立つことをいう．(3)を Trans(A) で表わす．▒

集合あるいはクラスの推移性は極めて重要な概念であり，この性質をもつ集合やクラスは非常に有用なものであることが次第に納得されるであろう．上で示した 0, 1, 2, $\cdots$ の各々は推移的集合である．さて定義から直ちに

定理 3.3.2 $\mathrm{Trans}(A)\wedge v\in A\rightarrow v\subset A$. ▒

定義 3.3.3 集合 u が**順序数**である——Ord(u) で表わす——とは，u が推移的かつ Conn(u) が成り立つことである：

$$\mathrm{Ord}(u)\equiv\mathrm{Trans}(u)\wedge\mathrm{Conn}(u).$$ ▒

順序数全体の集りを OR で表わす．すなわち

$$\mathrm{OR}=\{u|\mathrm{Ord}(x)\}.$$

よって OR はクラスである．後でこれが固有クラスであることが明らかとなる．

例 1. ϕ, $\{\phi\}$, $\{\phi, \{\phi\}\}$ は順序数である．各々が順序数に対する 2 性質をもつことは明白である．▒

定義 3.3.4 $0=\phi$, $1=0\cup\{0\}=\{0\}$, $2=1\cup\{1\}=\{0, 1\}$, $3=2\cup\{2\}=\{0, 1, 2\}$, $\cdots$ これらは順序数である．▒

順序数をギリシャ小文字

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \cdots,\ \kappa,\ \lambda,\ \mu,\ \cdots$$

で表わす．以下で，順序数の基本性質を順を追って調べよう．

---

† Conn は connect に由来する．X の任意の 2 要素が($\in$ に関し) **関係している**(あるいは**連結している**)ことを言い表わす．

定理 3.3.5　(i)　$\alpha\in\mathrm{OR}$ なら，$\in$ は(正確には $\in|\alpha$ は)α を整列する．

(ii)　$\alpha\in\mathrm{OR}\wedge\beta\in\alpha\rightarrow\beta=\mathrm{Seg}_{\in|\alpha}(\beta)$

証明　(i)　$\in$ が α 上の全順序であることは論をまたない．そこで u を α の任意の空でない部分集合とする．正則性公理(VIII)によって

$$\gamma\in u\wedge\gamma\cap u=\phi$$

なる要素 γ がある．この γ は u の $\in$-最小元である．

(ii)　$\mathrm{Seg}_{\in|\alpha}(\beta)=\{x|x\in\alpha\wedge x\in\beta\}=\{x|x\in\beta\}=\beta$. ▨

定理 3.3.6　$\alpha\in\mathrm{OR}$ に対し　(i)　$x\in\alpha\rightarrow x\in\mathrm{OR}$,

(ii)　$u\subset\alpha\wedge\mathrm{Trans}(u)\rightarrow u\in\alpha$.

証明　(i)　$x\in\alpha$ とする．$\mathrm{Trans}(x)$ を証明するために $z\in y\in x$ としよう．$\mathrm{Trans}(\alpha)$ より $z\in\alpha$. $\mathrm{Conn}(\alpha)$ より $z\in x\vee z=x\vee x\in z$. しかし $z=x$ または $x\in z$ からは $x\in y\in x$ または $x\in z\in y\in x$ が従うから，**2.6.3** または **2.6** の問1に反する．よって $z\in x$ でなければならない．ゆえに $\mathrm{Trans}(x)$ が成り立つ．また $x\subset\alpha$ であるから明白に $\mathrm{Conn}(x)$ である．よって $x\in\mathrm{OR}$.　(ii)　$\alpha\in\mathrm{OR}$, $u\subset\alpha$, $\mathrm{Trans}(u)$ とする．$z\in\alpha-u$ なる z が存在する．このとき

(4)　$$\forall x\in u(x\in z)$$

である．なぜなら，$x\in u$ なら $x\in\alpha$ だから $\mathrm{Conn}(\alpha)$ より $x\in z\vee x=z\vee z\in x$. $x=z\vee z\in x$ なら $\mathrm{Trans}(u)$ より $z\in u$ となって不合理．よって $x\in z$ でなければならないからである．(4)は u が α において有界であることを意味する．よって **3.2** の問2によって u の直後元 β が α の中に存在する．このとき

(5)　$$u=\beta$$

である．なぜなら，β は u の後者であるから $u\subseteq\beta$. 逆に $x\in\beta$ とすれば，β が u の直後元なることから $y\in u\wedge(x=y\vee x\in y)$ なる y が存在する．(これは $\neg[\exists x\in\beta\forall y\in u(y\in x)]$ のいいかえに過ぎない)．よって $\mathrm{Trans}(u)$ より $x\in u$. これより $\beta\subseteq u$ が従う．ゆえに(5)が成立する．(5)によって直ちに $u\in\alpha$ が従う．▨

問 1.　$\alpha\in\mathrm{OR}\wedge\alpha\neq0\rightarrow0\in\alpha$ を証明せよ．▨

定理 3.3.7　$\alpha,\beta\in\mathrm{OR}\rightarrow\alpha\subseteq\beta\vee\beta\subseteq\alpha$.

証明　$\alpha\not\subseteq\beta$ かつ $\beta\not\subseteq\alpha$ として矛盾を導けばよい．**3.3.5** (i)により，α, β は集合として $\in$ によって整列されているから，x_0 を $\beta-\alpha$ の $\in$-最小元，y_0 を $\alpha-\beta$ の $\in$-最小元とする．明白に $x_0\neq y_0$. しかし

(6)　$$\alpha\cap\beta=x_0,\qquad\alpha\cap\beta=y_0$$

が成り立つ．これは $x_0=y_0$ を意味するから不合理．以下(6)の証明：任意に $t\in$

$\alpha\cap\beta$ をとる．$t\in\beta$, $x_0\in\beta$, $\mathrm{Conn}(\beta)$ より $t\in x_0 \vee t=x_0 \vee x_0\in t$. $x_0\in t\vee t=x_0$ からは $t\in\alpha$ したがって $x_0\in\alpha$ が出るから x_0 の選び方に反する．よって $t\in x_0$. したがって $\alpha\cap\beta\subseteq x_0$. 逆に，$t\in x_0$ なら x_0 の最小性から $t\notin\beta-\alpha$, すなわち $t\in\beta\to t\in\alpha$. $x_0\in\beta$ だから $t\in\beta$ でなければならない．よって $t\in\alpha$. ゆえに $t\in\alpha\cap\beta$. したがって $x_0\subseteq\alpha\cap\beta$. かくて $\alpha\cap\beta=x_0$. $\alpha\cap\beta=y_0$ についても全く同様である．▒

系 3.3.8 OR 自身順序数と同じ性質をもつ：$\mathrm{Trans}(\mathrm{OR})\wedge\mathrm{Conn}(\mathrm{OR})$.

証明 まず $\alpha\in\mathrm{OR}$, $\beta\in\alpha$ とすれば **3.3.6** (i) によって $\beta\in\mathrm{OR}$. よって $\mathrm{Trans}(\mathrm{OR})$. また任意に α, $\beta\in\mathrm{OR}$ をとると，$\alpha\neq\beta$ なら **3.3.7** によって $\alpha\subset\beta\vee\beta\subset\alpha$. よって **3.3.6** (ii) により $\alpha\in\beta\vee\beta\in\alpha$. ゆえに $\mathrm{Conn}(\mathrm{OR})$. ▒

これより直ちに次の結果が従う．

定理 3.3.9 OR は $\in$ によって全順序づけられている：

$$\alpha,\ \beta\in\mathrm{OR}\to\alpha\in\beta\vee\alpha=\beta\vee\beta\in\alpha.$$ ▒

以下，**順序数の間では**

$$\alpha\in\beta \quad を \quad \alpha<\beta \quad で$$

表わすことにする．$\alpha\leq\beta$ はいつものように $\alpha<\beta\vee\alpha=\beta$ の略記である．すると順序数の間では

定理 3.3.10 α, $\beta\in\mathrm{OR}$ に対し (i) $\alpha\subseteq\beta\leftrightarrow\alpha\leq\beta$, (ii) $\alpha\subset\beta\leftrightarrow\alpha\in\beta\leftrightarrow\alpha<\beta$. ▒

記号 $<$ を用いると，順序数 α に対し

$$\alpha=\{\beta\in\mathrm{OR}\,|\,\beta<\alpha\}=\{\beta\,|\,\beta<\alpha\}$$

となりわれわれの順序数の定義が本節の冒頭に述べたフォン・ノイマンのアイデアに合致していることがわかったわけである．

定理 3.3.11 OR は固有クラスである．

証明 もし OR が集合なら，これを u とおくと **3.3.8** により $\mathrm{Trans}(u)\wedge\mathrm{Conn}(u)$ なるゆえ，OR の定義により $u\in u$. これは **2.6.1** に反する．▒

定理 3.3.12 $\in$ は OR を整列する．したがって $\langle\mathrm{OR},\in\rangle$ は整列クラスである．

証明 u を OR の空でない部分**集合**とする．正則性公理によって $\beta\in u$, $\beta\cap u=\phi$ なる要素 β がある．β は u の $\in$-最小元である．また OR の任意の $\in$-始切片が集合であることは明白．これらと **3.3.9** からこの定理が従う．▒

系 3.3.13 OR の任意の空でない部分クラスは $\in$-最小元をもつ．

証明 **3.3.12** と **3.2.2** とから直ちに従う．▒

今度は OR がいくつかの演算の下で閉じていることを調べてみよう.

定理 3.3.14　　$\alpha \in \mathrm{OR} \rightarrow \alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{OR}$.

証明　まず, $\mathrm{Trans}(\alpha \cup \{\alpha\})$ を示すために $x \in y \in \alpha \cup \{\alpha\}$ とせよ. $y \in \alpha$ のときは $\mathrm{Trans}(\alpha)$ から $x \in \alpha$, また $y \in \{\alpha\}$ のときも $x \in \alpha$. よって $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$. 次に $\mathrm{Conn}(\alpha \cup \{\alpha\})$ を示すために $x, y \in \alpha \cup \{\alpha\}$ とする. 1) $x, y \in \alpha$, 2) $x \in \alpha \wedge y \in \{\alpha\}$, 3) $x, y \in \{\alpha\}$, 4) $x \in \{\alpha\} \wedge y \in \alpha$ なる4つの場合が考えられる. 1) では $\mathrm{Conn}(\alpha)$ より $x \in y \vee x = y \vee y \in x$. 2)では $x \in y$, 3)では $x = y$, 4)では $y \in x$. よって $\mathrm{Conn}(\alpha \cup \{\alpha\})$. したがって $\alpha \cup \{\alpha\} \in \mathrm{OR}$. ▨

定義 3.3.15　任意の集合 x に対し $x+1 = x \cup \{x\}$ と定める. ▨

定理 3.3.16　$\alpha \in \mathrm{OR}$ に対し $\alpha+1$ は α の直後順序数である.

証明　$\alpha < \beta < \alpha+1$ ならば $\alpha \in \beta \in \alpha \cup \{\alpha\}$ であるから, $\alpha \in \beta \in \alpha$ または $\alpha \in \alpha$ が生ずるから不合理. よって, かかる順序数 β は存在しない. ▨

定理 3.3.17　$u \subset \mathrm{OR}$ ならば, $\bigcap u$ および $\bigcup u$ は順序数である. したがって特に $\alpha, \beta \in \mathrm{OR}$ ならば $\alpha \cup \beta, \alpha \cap \beta \in \mathrm{OR}$ である.

証明　仮定により u は最小元をもつ. それを α とすれば, $\alpha = \bigcap u$. 次に $v = \bigcup u$ とおく. $v \subset \mathrm{OR}$ であるから $\mathrm{Conn}(v)$. また $x \in y \in v$ なら, ある $\beta \in u$ に対し $y \in \beta$ である. したがって $x \in y \in \beta \in u$ となるから $x \in \beta \in u$. ゆえに $x \in v$. よって $\mathrm{Trans}(v)$. かくて $v \in \mathrm{OR}$. ▨

定理 3.3.18　$u \subset \mathrm{OR}$ ならば $\bigcup u$ は u の最小上界 $\sup u$ に等しい:

1)　$\forall \alpha \in u(\alpha \leq \bigcup u)$,　　2)　$\forall \beta[\forall \alpha \in u(\alpha \leq \beta) \rightarrow \bigcup u \leq \beta]$†.

証明　$\gamma = \bigcup u$ とおく. 任意の $\alpha \in u$ に対し, $\bigcup$ の定義によって $\alpha \subseteq \gamma$, すなわち $\alpha \leq \gamma$. 2)を証明するために u の任意の上界 β をとる. 任意の $\alpha \in \gamma$ に対し $\alpha \in \delta \in u$ なる δ が存在するから, これに対し $\delta \leq \beta$. よって $\alpha < \beta$. α は任意であるから $\gamma \leq \beta$ が従う. ▨

この定理によって, ある意味で“いくらでも大きい順序数が存在する”ことがわかる. なぜなら, 任意に順序数たちの一つの集合 u をつくれば $(\bigcup u)+1$ は u のどの順序数よりも大きい順序数であるからである. 素朴集合論におけるブラリ・フォルチの逆理はまさにこの結果にもとづいている. **そこでは**, OR も集合と認めるので $(\bigcup \mathrm{OR})+1$ をつくることによって OR のどの要素よりも大きい順序数がつくれてしまうという矛盾である. ZFC では OR は集合でないから逆理から逃れている.

定義 3.3.19　順序数 α が 0 かまたは $\beta+1$ という形をもつならば, α を第

---

† 次頁脚註参照.

1 種または**後者型**順序数といい，Suc(α) で表わす：

$$\mathrm{Suc}(\alpha) \leftrightarrow \alpha \in \mathrm{OR} \wedge (\alpha=0 \vee \exists\beta(\alpha=\beta+1)).$$

また，第 1 種順序数全体のクラスを同じく Suc で表わす．すなわち $\mathrm{Suc}=\{\alpha|\mathrm{Suc}(\alpha)\}$．第 1 種でない順序数を**第 2 種**順序数または**極限数**といい，Lim (α) で表わし，また極限数全体のクラスを Lim で表わす：

$$\mathrm{Lim}(\alpha) \leftrightarrow \alpha \in \mathrm{OR} \wedge \neg\,\mathrm{Suc}(\alpha), \qquad \mathrm{Lim}=\{\alpha|\mathrm{Lim}(\alpha)\}=\mathrm{OR}-\mathrm{Suc}.$$ ▨

定理 3.3.20 $\alpha \in \mathrm{Lim}$ ならば $\forall\beta<\alpha\,\exists\gamma[\beta<\gamma<\alpha]$.

証明 もし $\beta<\alpha \wedge \forall\gamma[\gamma<\alpha \rightarrow \beta\geq\gamma]$ なる β があれば，$\alpha=\beta+1$ となり不合理．▨

0 でない第 1 種順序数 α は直前元をもつ．それを $\alpha-1$ で表わす．α が極限数のときはもちろん直前元は存在しないが，この場合 $\alpha-1=\alpha$ と定める．少し一般化して

$$x-1=\begin{cases} x & \mathit{if}\quad x\notin \mathrm{OR} \vee \mathrm{Lim}(x) \vee x=0 \\ x=\beta+1 \text{ となる一意的な } \beta & \mathit{if}\quad x\in\mathrm{Suc}\wedge x\neq 0 \end{cases}$$

なるクラス関数を定義することができる．

例 2. 0, 1, 2, $\cdots$ は第 1 種順序数である．また $0-1=0$, $1-1=0$, $2-1=1$. ▨

問 2. $\alpha\neq 0$ のとき $\mathrm{Lim}(\alpha)\leftrightarrow\alpha=\bigcup\alpha$ を証明せよ．

問 3. $u\subset\mathrm{OR}$ とする．$\inf u=\bigcap u=\min u$ である．ここに $\inf u=\alpha\leftrightarrow\forall\beta\in u(\beta\geq\alpha)\wedge\forall\gamma(\forall\beta\in u(\beta\geq\gamma)\rightarrow\alpha\geq\gamma)$, $\min u=\alpha\leftrightarrow\alpha\in u\wedge\forall\beta\in u(\alpha\leq\beta)$.

問 4. $u\subset\mathrm{OR}$ なら u の直後順序数が存在する．

問 5. $\alpha<\beta\rightarrow\alpha+1<\beta+1$. ▨

3.4 超限帰納法の原理

3.3.12 によって順序数についての命題を証明するのにいわゆる超限帰納法を用いることができる．これは集合論において極めて有用な方法の一つである．

定理 3.4.1 **(超限帰納法の原理)** $\varphi(x)$ を集合論言語 $\mathcal{L}$ の任意の論理式とする．そのとき

(1) $$\forall\alpha(\forall\beta<\alpha\varphi(\beta)\rightarrow\varphi(\alpha))\rightarrow\forall\alpha\varphi(\alpha)^{\dagger}$$

が成り立つ．$\forall\beta<\alpha\varphi(\beta)$ を**帰納法の仮定**という．

† ギリシャ小文字は，順序数を表わすという約束であった．よって例えば $\forall\alpha\varphi(\alpha)$ とは $\forall x(x\in\mathrm{OR}\rightarrow\varphi(x))$ の略記である．また，$\varphi(x)$ が x 以外に自由変数をもつ場合はことわるまでもなく，(1)は全称解釈されるものとする．

証明　**3.2.2** において，$A=\mathrm{OR}$, $R=<$ ととると，帰納法原理によって

$$\forall x \in \mathrm{OR}\, \varphi(x) \qquad \text{i.e.} \qquad \forall \alpha\, \varphi(\alpha).$$ ▒

同じ証明方法によって制限された超限帰納法の原理が得られる．

定理 3.4.2（**ξ までの超限帰納法原理**）　任意の順序数 ξ と任意の論理式 $\varphi(x)$ とに対し

(2)　$$\forall \alpha<\xi(\forall \beta<\alpha \varphi(\beta) \rightarrow \varphi(\alpha)) \rightarrow \forall \alpha<\xi \varphi(\alpha).$$ ▒

問 1.　$\xi>0$ とする．もし $\forall \alpha<\xi(\forall \beta<\alpha\, \varphi(\beta) \rightarrow \varphi(\alpha))$ ならば，$\varphi(0)$ が成り立つことを示せ．

問 2.　OR の部分クラス A に対し：$\forall \alpha[\forall \beta<\alpha(\beta \in A) \rightarrow \alpha \in A] \rightarrow A=\mathrm{OR}$. ▒

早速これらの定理を利用して，新しく関数をつくるとき有用な“超限帰納法によって定義された関数の存在”を証明しよう．

定理 3.4.3（**超限帰納法による定義，超限帰納的定義**）　与えられたクラス関数 G に対し OR 上で定義されたクラス関数 F で次の条件をみたすものがただ一つ存在する：

(3)　$$\forall \alpha[F`\alpha=G`(F\upharpoonright\alpha)].$$

証明　論理式

$$\varphi(f, \beta) \equiv f\, \mathrm{Func}\, \beta \wedge \forall \alpha<\beta[f`\alpha=G`(f\upharpoonright\alpha)]$$

を考える．$\varphi(f, \beta)$, $\varphi(g, \gamma)$ なる f, g, β, γ を任意にとると，例えば $\beta \leq \gamma$ とすれば $f=g\upharpoonright\beta$ が従う．なぜならまず仮定により

(4)　$\forall \alpha<\beta[f`\alpha=G`(f\upharpoonright\alpha)]$,　　(5)　$\forall \alpha<\beta[g`\alpha=G`(g\upharpoonright\alpha)]$.

$\alpha<\beta$ として $\forall \gamma<\alpha(f`\gamma=g`\gamma)$ を仮定する（帰納法の仮定）．これより $f\upharpoonright\alpha=g\upharpoonright\alpha$. よって(4)，(5)から $f`\alpha=g`\alpha$. ゆえに **3.4.2**（β までの帰納法原理）によって $\forall \alpha<\beta(f`\alpha=g`\alpha)$. ゆえに $f=g\upharpoonright\beta$. このことは(4)によって β 上の関数 f が一意的に定まることを示している．そこでクラス F を

$$F=\{\langle x, y\rangle \mid \exists f \exists \beta[\langle x, y\rangle \in f \wedge \varphi(f, \beta)]\}$$

によって定義する．F はクラス関数である．なぜなら，$\langle x, y\rangle$, $\langle x, z\rangle \in F$ とすると $\langle x, y\rangle \in f \wedge \varphi(f, \beta)$, $\langle x, z\rangle \in g \wedge \varphi(g, \gamma)$ なる f, g, β, γ がある．上の議論から例えば $\beta \leq \gamma$ として $f=g\upharpoonright\beta$ をうるから $y=f`x=g`x=z$ となる．ゆえに，F はクラス関数である．この F に対し(3)が成り立つ．これを超限帰納法で証明するために帰納法の仮定として

(6)　$$\forall \beta<\alpha[F`\beta=G`(F\upharpoonright\beta)]$$

と仮定する．$\mathrm{Dom}(f)=\alpha+1$ なる関数 f を $f=F\upharpoonright\alpha \cup \{\langle\alpha, G`(F\upharpoonright\alpha)\rangle\}$ によって定義すれば，$f\upharpoonright\alpha=F\upharpoonright\alpha$, $f`\alpha=G`(F\upharpoonright\alpha)=G`(f\upharpoonright\alpha)$ であるから(6)を用いて

$\beta<\alpha+1 \to f`\beta=G`(f\upharpoonright\beta)$. すなわち

$$\langle\alpha,\ G`(F\upharpoonright\alpha)\rangle\in f\wedge\varphi(f,\ \alpha+1),\quad \text{i.e.}\quad \langle\alpha,\ G`(F\upharpoonright\alpha)\rangle\in F.$$

したがって $F`\alpha=G`(F\upharpoonright\alpha)$. ゆえに超限帰納法原理によって(3)が成り立つ. 同時に $\mathrm{Dom}(F)=\mathrm{OR}$ なることもいえた. F が一意的であることは, 別に

(3′) $$\forall\alpha[F_1`\alpha=G`(F_1\upharpoonright\alpha)]$$

なるクラス関数 F_1 が存在したとして, 超限帰納法で $\forall\alpha(F_1`\alpha=F`\alpha)$ なることを証明すればよい. ▒

定理 3.4.4 **(ξ までの超限帰納法による定義)** 与えられた順序数 ξ とクラス関数 G とに対し

(7) $$\forall\alpha<\xi[f`\alpha=G`(f\upharpoonright\alpha)]$$

をみたす ξ 上の関数 f がただ一つ存在する.

証明 前定理により(3)なるクラス関数 F が存在する. このとき $f=F\upharpoonright\xi$ は(7)を満足する. f の一意性は ξ までの超限帰納法によって示される. ▒

この定理を用いてどんな整列集合もある順序数と同型であるという重要な性質を証明しよう.

定理 3.4.5 $\langle u,\ r\rangle$ が整列集合ならば, ある順序数 γ が存在して

$$\langle u,\ r\rangle\cong\langle\gamma,\ <\rangle \qquad \text{または} \qquad \langle u,\ r\rangle\cong\langle\gamma,\ \leq\rangle.$$

このとき $\langle u,\ r\rangle$ は, あるいは簡単に u は, **順序型** γ をもつという. また集合 u は r に関し順序数 γ と**相似**であるという.

証明 r が非反射型の場合を示そう.

(8) $$G=\{\langle v,\ z\rangle\,|\,z\in u-\mathrm{Rng}(v)\wedge(u-\mathrm{Rng}(v))\cap(r^{-1}``\{z\})=\phi\}$$

なるクラス G をつくる. かかる z は $u-\mathrm{Rng}(v)$ の $<_r$-最小元である. この G に対し **3.4.3** によって

(9) $$\forall\alpha[F`\alpha=G`(F\upharpoonright\alpha)]$$

なるクラス関数 $F\colon \mathrm{OR}\longrightarrow V$ が一意的に定まる. そのとき

(10) $$\exists\gamma(u-F``\gamma=\phi)$$

が成り立つ. これを示すために $\forall\gamma(u-F``\gamma\neq\phi)$ と仮定する. α についての超限帰納法によって

(11) $F``\alpha$ は u の始切片で, $F\upharpoonright\alpha$ は順序保存である

ことを証明しよう. 帰納法の仮定として(11)が $\beta<\alpha$ なるすべての β について成立するとする. $\alpha=\beta+1$ の場合: $u-F``\beta\neq\phi$ すなわち $u-\mathrm{Rng}\,(F\upharpoonright\beta)\neq\phi$ であるから (8), (9) によって $F`\beta$ は $u-F``\beta$ の $<_r$-最小元. よって $F``\alpha$ は $u$ の始切片 $F``\beta$ へその直後元 $F`\beta$ を加えたものであるからやはり始切片

である．したがって $F{\restriction}\alpha$ が順序保存であることもわかる．$\alpha \in \mathrm{Lim}$ の場合：$F``\alpha$ は $u$ の始切片たち $F``\beta$ $(\beta<\alpha)$ の和集合であるから再び u の始切片である．（仮定により $u \neq F``\alpha$ であることに注意．）また $F{\restriction}\alpha$ は順序保存関数たち $F{\restriction}\beta$ $(\beta<\alpha)$ の和集合であるからやはり順序保存である．かくて(11)が証明された．これにより F は 1-1 で $\mathrm{Rng}(F) \subseteq u$ であることがわかる．よって $\mathrm{Rng}(F)$ は集合であるからこれを v とおこう．そのとき

$$F^{-1}: v \longrightarrow \mathrm{OR}$$

は関数で，$F^{-1}``v=\mathrm{OR}$．置換公理によって OR が集合となり **3.3.11** に反する．よって(10)が成立しなければならない．そこで $u-F``\gamma=\phi$ なる最小の順序数を改めて γ とおく．このとき上の議論によって

$$u=F``\gamma, \qquad F{\restriction}\gamma \text{ は順序保存}$$

であることがわかる．よって $F{\restriction}\gamma$ は $\langle\gamma, <\rangle$ と $\langle u, r\rangle$ との同型写像を与える．▨

定理 3.4.6　A が固有クラスで R が A を整列するならば

$$\langle A, R\rangle \cong \langle \mathrm{OR}, <\rangle.$$

証明　クラス $G=\{\langle v, z\rangle \mid z \in A-\mathrm{Rng}(v) \wedge (A-\mathrm{Rng}(v)) \cap R^{-1}``\{z\}=\phi\}$ に対し OR 上のクラス関数 $F$ で $\forall\alpha[F`\alpha=G`(F{\restriction}\alpha)]$ なるものが定まる．$\mathrm{Rng}(F) \subseteq A$ である．もし $A-F``\gamma=\phi$ なる順序数 γ が存在すれば $A \subseteq F``\gamma$ となる．置換公理によって $F``\gamma$ は集合なるゆえ A が集合になってしまう．よって

(12)　$$\forall\gamma(A-F``\gamma \neq \phi)$$

でなければならない．このとき

(13)　$F: \mathrm{OR} \longrightarrow A$　は順序保存かつ全射である．

なぜならまず順序保存性は，前定理の証明におけると同様にしてすべての α に対し

(14)　$F{\restriction}\alpha$ は順序保存かつ $F``\alpha$ は A の R-始切片である

が成り立つことから従う．F が全射であること：もし $F``\mathrm{OR} \neq A$ なら(14)によって $F``\mathrm{OR}$ は A のある始切片に含まれなければならない．よって $F``\mathrm{OR}$ は集合である．それを $u$ とおくと置換公理により（$F$ は 1-1 であるから）$\mathrm{OR}=F^{-1}``u$ が集合となって **3.3.11** に反する．ゆえに $F``\mathrm{OR}=A$ でなければならない．これで(13)が証明された．(13)はとりもなおさず，F が $\langle \mathrm{OR}, <\rangle$ と $\langle A, R\rangle$ の間の同型対応を与えることにほかならない．よって定理が証明された．▨

なお **3.2.7** によれば，上の同型対応はただ一つしかないことがわかる．

問 3. $\alpha \in \mathrm{OR}$, $u \subset \mathrm{OR}$ とする．もし $\langle \alpha, < \rangle \overset{f}{\cong} \langle u, < \rangle$ ならば，$\forall \beta < \alpha (\beta \leq f`\beta)$ である．

問 4. $\langle \alpha, < \rangle \cong \langle u, r \rangle$, $\langle \beta, < \rangle \cong \langle v, s \rangle$, $\alpha < \beta$ ならば，$\langle u, r \rangle$ は $\langle v, s \rangle$ のある始切片に同型である．▨

通常，超限帰納法原理や超限帰納法による定義は次の形で用いられることが多い．

定理 3.4.7 $\mathcal{L}$ の任意の論理式 $\varphi(x)$ に対し

$$\varphi(0) \wedge \forall \alpha > 0 [(\mathrm{Suc}(\alpha) \wedge \varphi(\alpha - 1) \to \varphi(\alpha)) \wedge (\mathrm{Lim}(\alpha) \wedge \forall \beta < \alpha \varphi(\beta) \to \varphi(\alpha))] \to \forall \alpha \varphi(\alpha),$$

すなわち，“ 1°) $\varphi(0)$ が成り立ち；任意の $\alpha > 0$ について，2°) $\alpha = \beta + 1$ で $\varphi(\beta)$ ならば $\varphi(\alpha)$ が成り立ち，3°) $\alpha \in \mathrm{Lim}$ で $\forall \beta < \alpha \varphi(\beta)$ ならば $\varphi(\alpha)$ が成り立つ” とせよ．そのときすべての α について $\varphi(\alpha)$ が成り立つ．

証明 定理の “$\cdots$” を仮定し $\forall \alpha (\forall \beta < \alpha \varphi(\beta) \to \varphi(\alpha))$ を証明すればよい．そのとき **3.4.1** が適用できて $\forall \alpha \varphi(\alpha)$ が得られる．▨

問 5. ξ までの超限帰納法を **3.4.7** の形に記述せよ．▨

定理 3.4.8 与えられた集合 a, クラス関数 F, G に対し

$$(15) \quad \begin{cases} A`0 = a, \qquad A`(\alpha + 1) = F`(A`\alpha) \\ \alpha \text{ が極限数のとき } A`\alpha = G`\{A`\beta \mid \beta < \alpha\} = G`(A``\alpha) \end{cases}$$

をみたすクラス関数 A がただ一つ存在する．このとき $A`\alpha$ の代わりに A_α(あるいは $A(\alpha)$) とかくことが多い．(15) を ξ 未満の順序数に制限すると ξ までの超限帰納法による定義となる．

証明 クラス関数 H を次のように定義する：

$$\langle w, z \rangle \in H \equiv [\mathrm{Dom}(w) = 0 \wedge z = a] \vee [\mathrm{Dom}(w) \in \mathrm{Suc} \wedge z = F`(w`(\mathrm{Dom}(w) - 1))] \vee [\mathrm{Dom}(w) \in \mathrm{Lim} \wedge z = G`(w``\mathrm{Dom}(w))].$$

H に対し **3.4.3** を適用することによって

$$\forall \alpha [A`\alpha = H`(A \restriction \alpha)]$$

をみたすクラス関数 A がただ一つ定まる．A は(15)を満足する．超限帰納法によって(15)をみたすクラス関数は一意的であることが示される．▨

3.5 自然数

本節では，最も基本的なもの——自然数——を定義する．もちろん自然数全体の集合の存在も証明される．前節の特殊ケースとしていわゆる**数学的帰納法**が導かれる．

定理 3.5.1　無限公理によって存在が保証されている

(1)　$$\phi\in a\wedge\forall x(x\in a\to x\cup\{x\}\in a)$$

なる集合aは次の性質をもつ：

(2)　$$\forall x(x\cup\{x\}\subseteq\mathrm{Suc}\to x\in a).$$

証明　(2)が成立しないとする．そのとき $\{x|x\cup\{x\}\subseteq\mathrm{Suc}\wedge x\notin a\}$ は OR の空でない部分クラスであるから **3.3.13** により $\in$–最小元αが存在する：

(3)　$$\alpha\cup\{\alpha\}\subseteq\mathrm{Suc}\wedge\alpha\notin a$$

(4)　$$\forall x\in\alpha(x\cup\{x\}\subseteq\mathrm{Suc}\to x\in a).$$

(1)，(3)より $0\neq\alpha\in\mathrm{Suc}$，したがって $\alpha=\beta\cup\{\beta\}$ なるβがある．$\beta\in\alpha$ と(4)から $\beta\in a$，よって(1)から $\alpha=\beta\cup\{\beta\}\in a$．これは(3)と矛盾する．ゆえに(2)が成立しなければならない．▒

定義 3.5.2　無限公理で保証された集合aを一つとり，分出公理を用いて

(6)　$$\omega=\{x\in a|x\cup\{x\}\subseteq\mathrm{Suc}\}$$

と定義する．前定理により集合ωの定義はaの選び方に関係しない．▒

注意　無限公理を第2章に述べた形に選んだ理由は，無限公理が存在を保証する集合aに，性質(2)をもたせるためであった．これにより ω の定義が容易になるという利点がある．▒

さて分出公理によってωは集合である．そうして前定理と **2.8.3** により

(7)　$$\omega=\{x|x\cup\{x\}\subseteq\mathrm{Suc}\}$$

が成り立つ．

定義 3.5.3　ωの要素を自然数という．▒

$x\cup\{x\}\subseteq\mathrm{Suc}$ なるxはx自身もxのすべての要素も第1種順序数であることを意味する．これはフォン・ノイマンのアイデア(**3.3**)に合致している．実際，以下で0，1，2，… 等が自然数であることが示されるであろう．

定理 3.5.4　(i)　$\forall\alpha(\alpha\in\omega\to\alpha+1\in\omega)$　　(ii)　$\omega\in\mathrm{OR}$.

証明　(i)　$\alpha\in\omega$ とする．$\alpha\cup\{\alpha\}\subseteq\mathrm{Suc}$ であるから $\alpha\cup\{\alpha\}\in\mathrm{Suc}$ と共に $(\alpha\cup\{\alpha\})\cup\{\alpha\cup\{\alpha\}\}\subseteq\mathrm{Suc}$．すなわち $\alpha+1\in\omega$．(ii)　$\omega\subset\mathrm{Suc}\subset\mathrm{OR}$ であるから $\mathrm{Conn}(\omega)$ は明らか．次に，任意に $x\in y\in\omega$ をとる．$y\subseteq\mathrm{Suc}$ より $x\in\mathrm{Suc}$．また $x\subset y$ ($\because$　$y\in\mathrm{OR}$) より $x\subseteq\mathrm{Suc}$．$\therefore$　$x\cup\{x\}\subset\mathrm{Suc}$，したがって $x\in\omega$．ゆえに $\mathrm{Trans}(\omega)$．よって $\omega\in\mathrm{OR}$．▒

系 3.5.5　$0\in\omega$, $1\in\omega$, $2\in\omega$ 等．▒

定理 3.5.6　(**数学的帰納法の原理**)　(i)　任意のクラス A に対し

(8)　$$0\in A\wedge\forall x(x\in A\to x+1\in A)\to\omega\subseteq A.$$

(ii)　$u\subseteq\omega$ であるとき，

(9) $$0 \in u \wedge \forall x(x \in u \rightarrow x+1 \in u) \rightarrow u=\omega.$$

証明 (i) (8)の前提を仮定する．もし $\omega \subsetneq A$ ならば，$\alpha \in \omega-A$ なる $<$-最小元 α が存在する．$\alpha \neq 0$ であり最小性によって

(10) $$\forall x \in \alpha(x \in A).$$

$\alpha \in \mathrm{Suc}$ であるから $\alpha=\beta+1$ なる $\beta \in \alpha$ がある．(10)により $\beta \in A$，したがって(8)により $\beta+1 \in A$，すなわち $\alpha \in A$．これは不合理．よって $\omega \subseteq A$．(ii) (i)によって $\omega \subseteq u$．したがって仮定から $u=\omega$．▨

定理 3.5.7 (**数学的帰納法による定義**$=\omega$ までの超限帰納法による定義) G が与えられたクラス関数，a が与えられた集合であるとき，

(11) $$f`0=a, \quad f`(n+1)=G`(f\upharpoonright(n+1)) \quad (n \in \omega)$$

によって ω 上の関数 f が一意的に定まる．

証明 $$G_1=\{\langle x, y\rangle \mid (x=\phi \wedge y=a) \vee (x \neq \phi \wedge \langle x, y\rangle \in G)\}$$

とすれば，**3.4.4** により $\forall n<\omega(f`n=G_1`(f\upharpoonright n))$ なる $f: \omega \longrightarrow V$ が一意的に定まる．この f は(11)をみたす．明白に f は集合である．▨

数学的帰納法による定義は，(11)の第2式を

(12) $$f`(n+1)=G`(f`n) \qquad (n \in \omega)$$

という形で使うことが多い．これは(11)の特別な場合であるから(12)による方法も許される．

問 1. (12)を(11)の第2式の形に直せ．

問 2. $\forall \alpha \exists \beta[\beta>\alpha \wedge \beta \in \mathrm{Lim}]$ が成り立つことを示せ．▨

定理 3.5.8 ω は極限数である：$\omega \in \mathrm{Lim}$.

証明 $\omega \in \mathrm{Suc}$ と仮定すれば，ω の定義から $\omega \subseteq \mathrm{Suc}$ であるから，$\omega \cup \{\omega\} \subseteq \mathrm{Suc}$ となり $\omega \in \omega$ が導かれる．不合理．ゆえに $\omega \notin \mathrm{Suc}$．▨

定義 3.5.9 ω 以上の順序数（すなわち $\omega \leq \alpha$ なる順序数 α）を**超限順序数**という．ω より小さい順序数(すなわち ω の要素)を**有限順序数**という．したがって自然数と有限順序数とは同概念である．▨

例 1. $\omega+1$ は超限順序数である．したがって $(\omega+1)+1$ は超限順序数である．▨

ここで，有用な“集合の超限列”の概念を導入しておこう．

定義 3.5.10 ν を任意の順序数とする．

$$f: \nu \longrightarrow V$$

なる関数 f が与えられたとき，f を**型 ν の集合列**という．この場合，例えば $u_\xi=f`\xi$ とおいて

(13) $\langle u_\xi | \xi < \nu \rangle$ あるいは $\langle u_\xi \rangle_{\xi<\nu}$

などで表わす．特に $f: \nu \longrightarrow \mathrm{OR}$ ならば，f を**型 ν の順序数列**という．この場合も $f`\xi$ の代わりに α_ξ などとかいて

(14) $\langle \alpha_\xi | \xi < \nu \rangle$ あるいは $\langle \alpha_\xi \rangle_{\xi<\nu}$

で表わす．

(13)において，$\nu=\omega$ ならばそれを**集合列**といい，$\nu>\omega$ ならば集合の**超限列**という．また $\nu=n\in\omega$ ならば集合の**有限列**という．この場合は

(15) $\langle u_0, u_1, \cdots, u_{n-1} \rangle$ あるいは $\langle u_i \rangle_{i<n}$

とかく．(14)についてもこれに準ずる．

なお有限集合，無限集合の概念は次章で定義される．

さて普通の数学では，自然数論は集合論から離れてペアノの公理系によって建設される．ペアノ公理系は，自然数，0，直後関数 $'$ を無定義術語とし3つの公理(そのうちの1つは公理図式である)によって規定する自然数論である．

定義 3.5.11 自然数論の言語 $\mathcal{L}_N$ は等号記号をもつ第1階の述語論理の言語で，特に個体定数0と関数記号 $'$ をもつものである†．形成規則は2種ある．

(i) 項の定義： 1°) 0と変数は項である．2°) t が項ならば $(t)'$ は項である．3°) 以上によって与えられたもののみが項である．

(ii) 論理式の定義： 1°) t_1, t_2 が項ならば，$t_1=t_2$ は論理式である(これらを原子論理式という)．2°) φ, ψ が論理式ならば，$\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\neg\varphi$, $\varphi\rightarrow\psi$ は論理式である．3°) φ が論理式で，x が変数ならば，$\exists x\varphi$, $\forall x\varphi$ は論理式である．4°) 以上によって与えられたもののみが論理式である．▒

定義 3.5.12 自然数論の体系 PA (**ペアノ算術**)とは，言語として $\mathcal{L}_N$ をもち次の3個の公理(ペアノの公理系)によって規定された体系である．

1°) $\forall x(x'\neq 0)$, 2°) $\forall x, y[x'=y' \leftrightarrow x=y]$, 3°) $\varphi(0)\wedge\forall x(\varphi(x)\rightarrow\varphi(x'))\rightarrow\forall x\varphi(x)$ なる形の論理式(全称扱いとする)．ただし，φ は $\mathcal{L}_N$ の論理式である．(3°)を**数学的帰納法**の公理(図式)という．) ▒

われわれは ZF 集合論において，自然数および自然数全体の集合 ω を定義した．また直後関数に当る関数 $x\mapsto x\cup\{x\}$ ももっている．この関数 (を ω に制限したもの)を $'$ で表わしたとき，構造 $\langle\omega, 0, '\rangle$ がペアノ公理系を満足すること，すなわちこれが PA のモデルであることを示そう††．

定理 3.5.13 構造 $\langle\omega, 0, '\rangle$ はペアノ公理系を満足する．ただし $'$ は関数

† 論理記号 $\vee$，$\wedge$，$\neg$，$\rightarrow$，限定作用素 $\exists$，$\forall$，個体変数 v_0, v_1, v_2, $\cdots$，をもつ．

†† 構造やモデルの概念については第5章を参照．

$\{\langle x, y\rangle | x\in\omega \wedge y=x\cup\{x\}\}$ を表わす.

証明 まずあらかじめ $0\in\omega$, $x\in\omega\to x'\in\omega$ をいっておかねばならないがそれは既に示した. 1°) もし $x'=0$ なら $x\cup\{x\}=0$ より $x\in 0$. 不合理. ゆえに $x'\neq 0$. 2°) $x, y\in\omega$ で $x'=y'$ とする. よって $x\cup\{x\}=y\cup\{y\}$ である. もし $x\neq y$ なら, $x\in y$ か $y\in x$ である. $x\in y$ なら, $x\cup\{x\}\subseteq y\subsetneq y\cup\{y\}$ となり不合理. $y\in x$ としても同様. ゆえに, $x=y$ でなければならない. 逆は明白である. 3°) $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ が $\mathcal{L}_N$ の論理式のとき, モデル $\langle\omega, 0, '\rangle$ で解釈すると, $x, x_1, \cdots, x_n\in\omega$ であり, 束縛変数も ω 上を走ると解釈されるから, 3°)は ω の任意の部分集合 u に対し

$$0\in u\wedge\forall x(x\in u\to x'\in u)\to u=\omega$$

が成り立つことにほかならない. しかしこれは, 既に **3.5.6**(ii)で証明されている. ▨

この結果, われわれは自然数についての既知の諸知識を ZF 集合論において自由に使用することができることになった. 例えば加法, 乗法等々についての PA による結論はすべて集合論 ZF で成立するのである†.

3.6 有基底的関係

R が関係とは $R\subseteq V\times V$ なるクラスのことであった. u が空でない集合で $u\subseteq \mathrm{Fld}(R)$ とする. もし

(1) $$a\in u\wedge\neg\exists x\in u[\langle x, a\rangle\in R\wedge\langle a, x\rangle\notin R]$$

なる要素 a があれば, a は u の R-**極小元**と呼ばれる. (p. 61 も参照.)

定義 3.6.1 関係 R が**有基底的**(well-founded)であるとは, 1°) $\mathrm{Fld}(R)$ の任意の空でない部分集合が R-極小元をもち, しかも 2°) すべての R-始切片が集合であることである††,†††. R が集合なら条件 2°)は不要である. ▨

† 第1階述語論理にもとづく PA の形式的展開において, 例えば加法 + は, $\mathcal{L}_N$ へ新関数記号 f を加え,

$$\mathrm{f}(x, 0)=x, \qquad \mathrm{f}(x, y')=\mathrm{f}(x, y)'$$

なる論理式によって定義される形式的対象 f として取り扱われる. これに対し通常の数学で取り扱うペアノ算術は集合概念を利用しており, 上の PA よりも広い理論である. そこでは関数 +, × などの存在を証明しながら議論が進められている. (**3.6.13′** に続く説明を参照.)

†† R が順序関係でないときも含めて, $\{x | \langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, x\rangle\notin R\}$ を y による R の始切片といい, $\mathrm{Seg}_R(y)$ で表わす. (1) も R が順序関係でない場合を考慮して記述してある.

††† **3.2.2** の証明法により, "$\mathrm{Fld}(R)$ の任意の空でない部分**クラス**が R-極小元をもつ" ことを証明できる.

定理 3.6.2 $\langle A, R\rangle$ が整列クラスならば，R は有基底的である．

証明 $\phi \neq u \subseteq A$ とする．u の R-最小元は R-極小元である．▨

この定理でわかるように，有基底的関係は整列順序関係の一般化である．

問 1. R が有基底的関係で $S \subseteq R$ ならば，S は有基底的である．▨

定理 3.6.3 $\in$ は(正確には $E=\{\langle x, y\rangle | x \in y\}$ は)有基底的関係である．

証明 1°) $\mathrm{Fld}(\in)=V$ である．よって任意に集合 $u \neq \phi$ をとる．正則性公理によって

$$a \in u \wedge a \cap u = \phi$$

なる a が存在する．a は u の $\in$-極小元である．2°)は明らか．▨

定理 3.6.4 R が有基底的関係ならば，R-無限下降列は存在しない．すなわち

(2) $$\forall n \in \omega[\langle x_{n+1}, x_n\rangle \in R \wedge \langle x_n, x_{n+1}\rangle \notin R]$$

なる集合列 $\langle x_n | n \in \omega\rangle$ は存在しない．

証明 もし(2)なる集合列 $\langle x_n | n \in \omega\rangle$ が存在すれば，$u=\{x_n | n \in \omega\}$ とおくとそれは $\mathrm{Fld}(R)$ の空でない部分集合であるが，明らかに R-極小元をもたない．▨

以下簡単のため，R が順序でなくても $\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \notin R$ を $y <_R x$ と略記する．(したがって $z <_R y <_R x$ とかいても R が推移法則をみたさない限りこれは $z <_R x$ を意味しない．) この記法によれば(2)は

(2′) $$\forall n \in \omega[x_{n+1} <_R x_n]$$

と表示される．

系 3.6.5 R が有基底的関係ならば，有限 R-循環列

(3) $$x_0 <_R x_n <_R \cdots <_R x_1 <_R x_0$$

は存在しない．

証明 (3)から(2′)なる R-無限下降列がつくれるからである．▨

系 3.6.6 $\in$-無限下降列は存在しない．すなわち

$$\cdots \in x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_2 \in x_1 \in x_0$$

なる集合列 $\langle x_n | n \in \omega\rangle$ は存在しない．▨

系 3.6.7 順序数の $<$-無限下降列は存在しない．すなわち

$$\cdots < \alpha_n < \alpha_{n-1} < \cdots < \alpha_2 < \alpha_1 < \alpha_0$$

なる列 $\langle \alpha_n \in \mathrm{OR} | n \in \omega\rangle$ は存在しない．▨

定理 3.6.8 公理系(Ⅰ)～(Ⅶ)，(Ⅸ)を ZFC* とおく．ZFC* において正則性公理(Ⅷ)は **3.6.6** と同値である．

証明 ZFC* と **3.6.6** から(VIII)を導けばよい．そこで(VIII)が成立しないとする．よって

(4) $$u \neq \phi \wedge \forall a \in u (a \cap u \neq \phi)$$

なる集合 u が存在する．選択公理(IX)によって，$\mathscr{P}(u)$ の選択関数が存在するから(**2.9.13** による)†その一つを f とする：

$$\forall v (v \neq \phi \wedge v \subseteq u \to f`v \in v)$$

$f`\phi = \phi$ として f を $\mathscr{P}(u)$ 上の関数に拡張しておく．$a \in u$ なる a を任意にとり固定する．**3.5.7** によれば

$$g`0 = a, \qquad g`(n+1) = f`((g`n) \cap u)$$

によって ω 上の関数 g の存在がいえる††．(4)によって $a \cap u \neq \phi$ なるゆえ

$$g`1 = f`(a \cap u) \in a \cap u \subseteq u.$$

そこで n を任意の自然数とし，ω までの帰納法に関する帰納法の仮定として

(5) $$g`n \in (g`(n-1)) \cap u$$

が成り立つとする．再び(4)により $(g`n) \cap u \neq \phi$ であるから

$$g`(n+1) = f`((g`n) \cap u) \in (g`n) \cap u.$$

ゆえに ω までの帰納法原理によって，(5)はすべての自然数 n について成立する．したがって $\forall n \in \omega\ (g`(n+1) \in g`n)$．これは **3.6.6** に反する．ゆえに(VIII)が成立しなければならない．▨

想像されるように有基底的関係は整列関係と類似な諸性質をもつ．ここではそのうちの有用な二，三のものを述べる．

定理 3.6.9 R は有基底的関係で，$\varphi(x)$ は $\mathscr{L}$ の任意の論理式とする．

(i) (**極小元原理**) $\exists x[\varphi(x) \wedge x \in \mathrm{Fld}(R)]$ ならば，クラス $\{x | \varphi(x) \wedge x \in \mathrm{Fld}(R)\}$ は R-極小元をもつ．

(ii) (**帰納法原理**) $\forall x \in \mathrm{Fld}(R)[\forall y (y <_R x \to \varphi(y)) \to \varphi(x)] \to \forall x \in \mathrm{Fld}(R)[\varphi(x)]$．($R$ が順序でなくてもこの定理は成り立つ．その場合，$<_R$ は **3.6.4** の証明の後に述べた意味であるとする．)

証明 (ii)は(i)から直ちに従う．そこで(i)を証明する．$x_1 \in \mathrm{Fld}(R) \wedge \varphi(x_1)$

---

† **2.9.13** は公理(VIII)の使用なしに証明される．

†† 順序数の有用な性質は公理(VIII)に依存している．よって **3.6.8** の証明に先立って‘ω までの帰納法（による定義）’についての定理を正則性の公理なしに証明しておかなければならない．それには順序数の定義を変更して

定義 x が順序数とは，$\mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{Conn}(x) \wedge$‘$\in | x$ は x を整列する’が成り立つときにいう．▨

とすればよい．この新定義によれば公理 VIII なしに順序数のすべての性質を導くことができる．

なる x_1 を一つとる．$\{x|x\leq_R x_1\wedge\varphi(x)\}$ は $\mathrm{Fld}(R)$ の部分集合であるから，R–極小元 x_0 をもつ．x_0 はクラス $\{x|\varphi(x)\wedge x\in\mathrm{Fld}(R)\}$ の R–極小元である．▨

系として次の非常に有用な結果が得られる：

系 3.6.10　(**∈–帰納法の原理**)　$\mathcal{L}$ の任意の論理式 $\varphi(x)$ に対し

$$\forall x[\forall y\in x\varphi(y)\to\varphi(x)]\to\forall x\varphi(x).\quad ▨$$

定理 3.6.11　(**有基底的関係に関する帰納的定義**)　R が有基底的関係で，G がクラス関数ならば，

$$\forall x\in\mathrm{Fld}(R)[F`x=G`\langle x, F\restriction\mathrm{Seg}_R(x)\rangle]$$

をみたす $\mathrm{Fld}(R)$ 上のクラス関数 F が一意的に存在する†．▨

ここではこの定理の特別な場合，すなわち R が特に $\in=E=\{\langle x, y\rangle|x\in y\}$ である場合の証明を示す．（一般の場合は 5 章で取り扱う．）　この特別な場合は，∈–帰納法による定義または ∈–帰納的定義と呼ばれるもので極めて有用な手段である．改めて述べよう．

定理 3.6.12　(**∈–帰納法による定義**)　与えられたクラス関数 G に対し

$$\forall x[F`x=G`\langle x, F\restriction x\rangle]$$

をみたすクラス関数 F がただ一つ存在する．F を G から **∈–帰納法によって定義されたクラス関数**という．▨

応用の便宜上，この定理をパラメタへの依存を明示した形で記述しよう．**2.8.1** において，φ によりパラメタ $a_1, \cdots, a_n$ から定義されたクラスは，パラメタ $a_1, \cdots, a_n$ に依存するからそれらを明示して

$$(6)\qquad F(a_1, \cdots, a_n)=\{x|\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)\}$$

のように表わすと便利である．この際 $a_1, \cdots, a_n$ への依存の仕方は共通の φ が用いられているという意味で $F(a_1, \cdots, a_n)$ の存在は**一様**である††．(6) に対し

$$F(a_1, \cdots, a_n)`x=\iota y[\langle x, y\rangle\in F(a_1, \cdots, a_n)]$$

$$F(a_1, \cdots, a_n)\restriction x=\{\langle t, y\rangle|t\in x\wedge\langle t, y\rangle\in F(a_1, \cdots, a_n)\}$$

とする．これらは既に導入された記法の流用である．

---

†　右辺へ x を残しておく理由は，これを応用する際 R が $u=\mathrm{Seg}_R(x)$ から x が求まるような関係であることを必要とするからである．$F`x=G`(F\restriction x)$ という形の結果が成り立つことはもちろんである．

††　このとき F を (n–変数) **演算子**と呼ぶことがある．この用語を用いると，“存在が一様である”と述べる代わりに，“演算子として存在する”と言い表わすことができる．

定理 3.6.13 与えられたクラス $G(a_1, \cdots, a_n)$ に対し

$$(7)\quad \begin{array}{l} \forall x \exists ! y[\langle x, y\rangle \in F(a_1, \cdots, a_n)] \\ \forall x[F(a_1, \cdots, a_n)`x = G(a_1, \cdots, a_n)`\langle x, F(a_1, \cdots, a_n)\upharpoonright x\rangle \end{array}$$

なるクラス $F(a_1, \cdots, a_n)$ が一様に存在する．これを $G(a_1, \cdots, a_n)$ から $\in$-帰納法によって定義されたクラスという．

証明 記述を簡単にするためパラメタを省略し，**3.6.12** の形で証明する．

$\Theta(f) \equiv \mathrm{Func}(f) \wedge \mathrm{Trans}(\mathrm{Dom}(f)) \wedge \forall x \in \mathrm{Dom}(f)[f`x = G`\langle x, f\upharpoonright x\rangle]$

とおく．**3.4.3** の証明と同様にして

$$(8)\qquad \Theta(f) \wedge \Theta(f') \to f = f' \ \ on\ \ \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(f')$$

なることがわかる($\in$-帰納法による)．そこで

$$\langle x, y\rangle \in F \equiv \exists f[\Theta(f) \wedge x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge f`x = y]$$

と定義する．この F が(7)をみたすことを証明する．

任意に x をとる．($\in$-帰納法の仮定として) $\forall t \in x[\exists ! y[\langle t, y\rangle \in F] \wedge F`t = G`\langle t, F\upharpoonright t\rangle]$ とする．集合 x の**推移閉包** $\mathrm{TC}(x)$ は **3.6.14** で与えられる．いま

$$A = \{f \mid \Theta(f) \wedge \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{TC}(x)\}$$

とすれば，A は集合である．なぜなら

$$B = \{u \mid \exists v \in \mathrm{TC}(x) \exists f[\Theta(f) \wedge v \in \mathrm{Dom}(f) \wedge f`v = u]\}$$

なる B が集合である(すぐ後で述べる)から

$$f \in A \to f \subseteq \mathrm{TC}(x) \times B \qquad したがって \qquad A \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{TC}(x) \times B)$$

なることと合せて A が集合であることがわかる．B が集合であることの証明：$\psi(v, u) \equiv \exists f[\Theta(f) \wedge v \in \mathrm{Dom}(f) \wedge f`v = u]$ とおく．$\psi(v, u) \wedge \psi(v, w)$ とすれば(8)によって $u = w$ が成り立つ．ゆえに置換公理によって $B = \{u \mid v \in \mathrm{TC}(x) \wedge \psi(v, u)\}$ は集合である．

さて A が集合であるから $f_0 = \bigcup A$ なる f_0 は集合で(8)によりそれは関数である．$u \in v \in \mathrm{Dom}(f_0)$ とせよ．ある $f \in A$ に対し $v \in \mathrm{Dom}(f)$．$\mathrm{Trans}(\mathrm{Dom}(f))$ だから $u \in \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(f_0)$．したがって $\mathrm{Trans}(\mathrm{Dom}(f_0))$．また

$$f_0`v = f`v = G`\langle v, f\upharpoonright v\rangle = G`\langle v, f_0\upharpoonright v\rangle$$

であるから $\Theta(f_0)$ が成立する．次に $t \in x$ とせよ．帰納法の仮定により $\langle t, y_0\rangle \in F$ なる y_0 がただ一つある．よって $\Theta(f)$ なるある f に対し $t \in \mathrm{Dom}(f)$．$\Theta(f\upharpoonright \mathrm{TC}(x))$ は明白であるから $f\upharpoonright \mathrm{TC}(x) \in A$．$t \in \mathrm{TC}(x)$ であるから $t \in \mathrm{Dom}(f\upharpoonright \mathrm{TC}(x))$，よって $t \in \mathrm{Dom}(f_0)$．すなわち $x \subseteq \mathrm{Dom}(f_0)$．そこで

$$h = f_0 \cup \{\langle x, G`\langle x, F\upharpoonright x\rangle\rangle\}$$

とおけば，$\Theta(h)$ が成り立ち，$x \in \mathrm{Dom}(h)$．よって $h`x=y$ とおけば F の定義によって $\langle x, y\rangle \in F$．$y$ の一意性は(8)から従う．

ところで h の定義により $y=G`\langle x, F\restriction x\rangle$ であるから，$F`x=G`\langle x, F\restriction x\rangle$．これで(7)が証明された．▨

3.4 で述べた超限帰納法による定義を，パラメタを明示した形で記述してみよう．例えば **3.4.3** は次のようになる．

定理 3.6.13′ 与えられたクラス関数 $G(a_1, \cdots, a_n)$ に対し OR 上で定義されたクラス関数 $F(a_1, \cdots, a_n)$ で次の条件をみたすものが一様に存在する：

$$\forall \alpha[F(a_1, \cdots, a_n)`\alpha=G(a_1, \cdots, a_n)`(F(a_1, \cdots, a_n)\restriction \alpha)].$$ ▨

例えば $G(a)=\{x \mid \exists y, z[x=\langle y, z\rangle \wedge [(y=0 \wedge z=a) \vee (y\neq 0 \wedge z=(y`(\mathrm{Dom}(y)-1)) \cup \{y`(\mathrm{Dom}(y)-1)\})]]\}$ に対し上の定理により

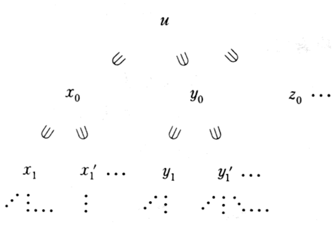
$$F(a)`\alpha=G(a)`(F(a)\restriction \alpha)$$

なるクラス関数 $F(a)$ が一様に定まる．このとき $f=\{\langle\langle a, n\rangle, F(a)`n\rangle \mid a, n \in \omega\}$ とすれば $f: \omega\times\omega \longrightarrow \omega$ で

$$f(a, 0)=a, \qquad f(a, n+1)=f(a, n)+1$$

が成り立つ．すなわち $f(a, n)$ は自然数の加法 $a+n$ を与える関数である．

証明中に用いられた**推移閉包**と呼ばれる概念を導入しよう．今後しばしば現われる重要な概念である．空でない集合が与えられたとき，u の要素，u の要素の要素，そのまた要素(もちろんそれらが存在するとき)，… というようにとれるだけとって，これらすべてを要素とする集合 v というものが考えられる．



作り方から v は u を含む推移的な集合であり，そのようなもののうち一番小さい集合であろうと予想される．

定義 3.6.14 与えられた集合 u に対し

$$f`0=u, \qquad f`(n+1)=\bigcup f`n \quad (n \in \omega)$$

によって Dom$(f)=\omega$ なる関数 f が定まる．集合

$$\mathrm{TC}(u) \underset{\mathrm{def}}{=} \bigcup f``\omega = \bigcup\{f`n \mid n\in\omega\}^{\dagger}$$

を u の**推移閉包**という．TC(u) が集合であることは置換公理と和集合公理とによってわかる．▨

補題 3.6.15 (i) $u\subseteq \mathrm{TC}(u)$, (ii) Trans(TC$(u)$).

証明 (i) 定義から明白．(ii) $x\in y\in \mathrm{TC}(u)$ とすれば，$y\in f`n$ なる $n$ がある．これに対し $x\in \bigcup f`n = f`(n+1)\subseteq \mathrm{TC}(u)$. ∴ Trans(TC$(u)$). ▨

定理 3.6.16 TC(u) は u を部分集合として含む推移集合のうち最小のものである：$\forall v[u\subseteq v\wedge \mathrm{Trans}(v)\to \mathrm{TC}(u)\subseteq v]$. あるいは $\mathrm{TC}(u)=\bigcap\{v\mid v\supseteq u\wedge \mathrm{Trans}(v)\}$. したがって $\mathrm{Trans}(u)\to \mathrm{TC}(u)=u$.

証明 **3.6.15** により TC(u) は u を含む推移集合であるから，最小性を示せばよい．よって $u\subseteq v\wedge \mathrm{Trans}(v)$ とせよ．もし $\mathrm{TC}(u)\subsetneq v$ ならば，$x\in \mathrm{TC}(u)-v$ なる x が存在する．よって $x\in f`n-v$ なる $n\in\omega$ がある．n までの帰納法による定義によって

$$x\in y_1\in y_2\in\cdots\in y_{n-1}\in f`0$$

なる $n-1$ 個の集合 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ の存在がいえる．$f`0=u\subseteq v$ であるから Trans(v) より $x\in v$ となり不合理．[$n=0$ なら直接 $x\in u$, すなわち $x\in v$ となり不合理.] ゆえに $\mathrm{TC}(u)\subseteq v$. ▨

問 2. 次を証明せよ．

1) $y\subseteq \mathrm{TC}(x)\to \mathrm{TC}(y)\subseteq \mathrm{TC}(x)$
2) $y\in \mathrm{TC}(x)\to \mathrm{TC}(y)\subseteq \mathrm{TC}(x)$. ▨

具体的問題を論ずるときは，集合上の関係を取り扱うことが多い．そのような場合は，始切片に対する集合性条件は不要である．よって次のような記法を用いると記述が簡単になる．

r をある集合上の関係とし，u を任意の集合とする．

$r\,\mathrm{Wf}\,u \equiv \forall x[x\subseteq u\wedge x\neq\phi\to \exists t\in x\forall s\in x\neg[s<_r t]]$ （r は集合上で有基底的である．）

$r\,\mathrm{Conn}\,u\equiv \forall x, y\in u[x<_r y\vee x=y\vee y<_r x]$ （r は u 上で連結である．）

$r\,\mathrm{W_O}\,u\equiv r\,\mathrm{Wf}\,u\wedge r\,\mathrm{Conn}\,u$ （r は u を整列する．）

問 **3.** $r\,\mathrm{W_O}\,u$ ならば関係 r は全順序であることを示せ．▨

---

† これは $f`0\cup f`1\cup f`2\cup\cdots$ と略記されることがある．したがって

$$\mathrm{TC}(u)=u\cup\bigcup u\cup\bigcup^2 u\cup\bigcup^3 u\cup\cdots$$

と表示される．

3.7 従属選択の公理

ここで近時集合論，特に記述集合論において重要な働きをする従属選択の公理(Axiom of dependence choice)について述べよう．次の論理式を**従属選択の公理**といい，DC で表わす：

$$\mathrm{DC}: \forall u \forall r[(u \neq \phi \wedge r \subseteq u \times u \wedge \forall x \in u \exists y \in u(x <_r y)) \rightarrow \exists f(f: \omega \longrightarrow u \wedge \forall n \in \omega(f`n <_r f`(n+1)))].$$

この公理は選択公理 AC（=IX）より真に弱いが，ZF+DC において解析学の大きな部分をまかなえることが知られている．例えば次に述べるように DC から可算選択公理が導かれ，後者は測度論の展開に十分な選択原理である．

次の論理式を**可算選択公理**といい CA で表わす：

$$\mathrm{CA}: \forall u(u \sim \omega \text{ ならば，} u \text{ は選択関数をもつ})$$

ここに $u \sim \omega$ は“u から ω の上への全単射が存在する”ことを表わす．

定理 3.7.1 $\mathrm{ZF} \vdash \mathrm{DC} \rightarrow \mathrm{CA}$.

証明 $u \sim \omega$ とし，$g: \omega \longrightarrow u-\{\phi\}$ を全単射とする．$x, y \in u \rightarrow x \cap y = \phi$ が成立すると仮定してよい．（なぜなら，もしそうでないときは **2.9.13** の証明法を適用して，互いに素な場合に帰着させることができるからである．）そこで

$$r = \bigcup\{g`m \times g`(m+1) \mid m \in \omega\} \qquad (\subseteq (\bigcup u) \times (\bigcup u))$$

によって集合 r を定義し DC を適用する．よって

$$f_1: \omega \longrightarrow \bigcup u, \qquad \forall n \in \omega[f_1`n <_r f_1`(n+1)]$$

なる f_1 が存在する．よって

$$\forall n \in \omega \exists m[f_1`n \in g`m \wedge f_1`(n+1) \in g`(m+1)]$$

である．各 $n \in \omega$ に対し $f_1`n \in g`m \wedge f_1`(n+1) \in g`(m+1)$ なる最小の m をとり m_n とおく．（この選択にはもちろん AC は不要である！）互いに素であることから $\forall i \in \omega\ (m_{i+1} = m_0 + i)$ でなければならないことがわかる．よって $i \in \omega \rightarrow f_1`i \in g`(m_0+i)$．有限集合 $\{g`i \mid i < m_0\}$ については $i < m_0 \rightarrow f_2`i \in g`i$ なる f_2 を AC なしに構成できる．このとき

$$f`i = \begin{cases} f_2`i & if \quad i < m_0 \\ f_1`(i-m_0) & if \quad i \geq m_0{}^{\dagger} \end{cases}$$

---

† $i, j \in \omega$, $i \geq j$ に対し $i-j$ は通常の差である．それは集合差 $i-j$ と1対1に対応する自然数 n として定義することができる．

によって f を定義すれば，$\forall i \in \omega[f`i \in g`i]$. この f を用いて容易に u の選択関数を定義できる. ▨

DC のもう一つの重要な寄与は次の定理である.

定理 3.7.2 ZF+DC において，集合 r が有基底的関係であるための必要十分条件は $<_r$-無限下降列が存在しないことである.

証明 必要性は **3.6.4** に含まれている. 実際その証明は AC には無関係である. 十分性：$<_r$-無限下降列が存在しないとする. もし r が有基底的でないとすれば，ある空でない集合 $u \subseteq \mathrm{Fld}(r)$ に対し，u が r-極小元をもたないことになる. これは

$$\forall x \in u \, \exists y \in u[y <_r x]$$

を意味する. DC を r^{-1} に対し適用すれば，$\forall n \in \omega(f`(n+1) <_r f`n)$，$f: \omega \longrightarrow u$ なる f の存在がいえる. これは仮定に反する. ▨

この定理は，AC は成立しないが DC とは抵触しないような世界で有用になる. 可算選択公理からは **3.7.2** が導けないので，DC の有用性がわかるであろう.

注意 この定理は，始切片がすべて集合であるクラス R についても適用できる.（DC を集合 $(R|u)^{-1}$ に適用すればよい.）▨

3.8 集合の階数と累積階層

与えられた集合のある意味での複雑さを表わす階数の概念を導入する. これは集合論展開においてかなり基本的な役割を果すものである.

定義 3.8.1 超限帰納法によって $\alpha \in \mathrm{OR}$ に対し集合 V_α を次のように定義する：

$$\begin{cases} V_0 = \phi, \qquad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha) \\ V_\alpha = \bigcup\{V_\beta \mid \beta < \alpha\} \qquad (\alpha \in \mathrm{Lim} \text{ のとき}). \end{cases}$$

クラス $\{V_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{OR}\}$ を**累積階層**といい，V_α を水準 α の階層という[†].

以下で V_α のもつ基本性質を調べよう.

定理 3.8.2 各 $\alpha \in \mathrm{OR}$ に対し，(i) V_α は集合として一意的に存在する，(ii) $\mathrm{Trans}(V_\alpha)$.

証明 (i) **3.4.8** から直ちに従う. そこの式(15)において，$F = \{\langle x, u\rangle|$

† V_α の代わりに R_α 又は $R(\alpha)$ を用いる本もある. 集合であることが証明されるから，小文字でかくべきであろうが，習慣に従って大文字を用いた. V_α を $V`\alpha$ の略記と考えれば従来の記法に抵触しない.

$u=\mathcal{P}(x)\}$，$G=\{\langle x, u\rangle | u=\bigcup x\}$ とすればよい．（ii） α についての超限帰納法による．Trans(V_0) は明白．$\beta<\alpha$ なるすべての β に対し Trans(V_β) であると仮定する．$\alpha=\beta+1$ のとき．$x\in y\in V_\alpha$ なる任意の x, y をとる．$V_\alpha=\mathcal{P}(V_\beta)$ であるから，$x\in y\subseteq V_\beta$．したがって $x\in V_\beta$．Trans(V_β) より $x\subseteq V_\beta$，よって $x\in V_\alpha$．ゆえに Trans(V_α)．今度は $\alpha\in\mathrm{Lim}$ とする．$x\in y\in V_\alpha$ とせよ．$V_\alpha=\bigcup\{V_\beta|\beta<\alpha\}$ であるから，ある $\beta<\alpha$ に対し $x\in y\in V_\beta$．帰納法の仮定により $x\in V_\beta$，したがって $x\in V_\alpha$．ゆえに Trans(V_α)．よって超限帰納法の原理により $\forall\alpha\,\mathrm{Trans}(V_\alpha)$． ▨

定理 3.8.3　（i） $x\in V_{\beta+1}, y\in x\to y\in V_\beta$．（ii） $\beta<\alpha\to V_\beta\in V_\alpha$，したがって $V_\beta\subsetneq V_\alpha$．（iii） $\alpha>0\to V_\alpha=\bigcup\{V_{\beta+1}|\beta<\alpha\}$． ▨

問 1.　**3.8.3** を証明せよ． ▨

定義 3.8.4　$U=\bigcup\{V_\alpha|\alpha\in\mathrm{OR}\}$ とおく．$x\in U$ に対し $x\in V_{\alpha+1}-V_\alpha$ なる一意的に定まる順序数 α を集合 x の**階数**といい，$\rho(x)$ で表わす．ρ を**階数関数**という．これは $\mathrm{Dom}(\rho)=U$ なるクラス関数である†． ▨

上の **3.8.3** (ii)によって $\beta<\alpha\to V_\beta\subset V_\alpha$ であるから，$\rho(x)$ は $x\in V_{\alpha+1}$ なる**最小の順序数** $\boldsymbol{\alpha}$ である．

定理 3.8.5　（i） $x\in V_\alpha\leftrightarrow\rho(x)<\alpha$．（ii） $x\in y\to\rho(x)<\rho(y)$．
（iii） $\alpha\in U$ で，$\rho(\alpha)=\alpha$．（iv） $\mathrm{OR}\subseteq U$，したがって U は固有クラスである．（v） Trans(U)．

証明　（i） $x\in V_\alpha$ とする．$\alpha=\beta+1$ なら $\rho(x)\le\beta<\alpha$．$\alpha\in\mathrm{Lim}$ なら，$x\in V_{\beta+1}$，$\beta<\alpha$ なる β があるから，$\rho(x)\le\beta<\alpha$．よって $\rho(x)<\alpha$．逆も α についての超限帰納法で容易に証明される．（ii） $x\in y$，$\rho(y)=\alpha$ とする．よって $x\in y\in V_{\alpha+1}=\mathcal{P}(V_\alpha)$．したがって $x\in y\subseteq V_\alpha$．ゆえに $x\in V_\alpha$．(i)により $\rho(x)<\alpha=\rho(y)$．（iii） α についての超限帰納法による．明白に $0\in U$, $\rho(0)=0$．$\alpha>0$ とし帰納法の仮定として $\beta<\alpha\to\beta\in U\wedge\rho(\beta)=\beta$ とせよ．$\alpha=\{\beta|\beta<\alpha\}\subset\bigcup\{V_{\beta+1}|\beta<\alpha\}=V_\alpha$（**3.8.3** (iii) による）．∴ $\alpha\in\mathcal{P}(V_\alpha)=V_{\alpha+1}$，したがって $\alpha\in U$．もし $\alpha\in V_\alpha$ なら，$\alpha\in V_{\beta+1}$，$\beta<\alpha$ なる β が存在する．よって $\rho(\alpha)\le\beta=\rho(\beta)$．これは上の(ii)と矛盾する．ゆえに $\alpha\in V_{\alpha+1}-V_\alpha$，すなわち $\rho(\alpha)=\alpha$．（iv） これは(iii)から直ちに従う．（v） これは **3.8.2** (ii) から直ちに従う． ▨

定理 3.8.6　u が集合のとき，$u\subset U\to u\in U$．

証明　$u\subset U$ とする．$\sup\{\rho(x)+1|x\in u\}<\alpha$ なる極限数 α が存在する（**3.**

† われわれの記法では $\rho`x$ とかくべきであるが，慣習に従って $\rho(x)$ とかく．

3.18 と **3.5** 問2による). これに対し,

$$x \in u \to x \in V_{\rho(x)+1} \subset V_\alpha$$

であるから, $u \subseteq V_\alpha$. したがって $u \in V_{\alpha+1}$, ゆえに $u \in U$. ▨

次の性質は, 正則性の公理と深くかかわり合っている.

定理 3.8.7 $\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha)$, すなわち $V=U$.

証明 $\in$-帰納法(これは正則性公理にもとづいている!)によって

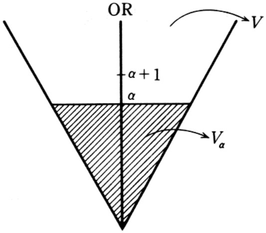
(1) $$\forall x[\forall y \in x(y \in U) \to x \in U]$$

なることが証明できればよい. よって任意の集合 x をとり $\forall y \in x(y \in U)$ を仮定する. これは $x \subset U$ にほかならないから, **3.8.6** によって $x \in U$. ゆえに(1)が成り立ち, $\forall x(x \in U)$ である. ▨

この定理と **3.8.3** (ii)により, V は

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_\alpha \subset \cdots, \qquad V = \bigcup \{V_\alpha | \alpha \in \mathrm{OR}\}$$

なる積み重なった階層に分けられることがわかった. したがってわれわれの集合論の宇宙像は次の図のようなものと考えることができるであろう:



すなわち, 宇宙 V をコーン状の容器にたとえ, この中にすべての集合が入っているとする. 真中の背骨にあたるところに, 順序数が小さい順に, 下から順に並んでいると考える. このとき各順序数 α に対し累積階層 V_α は α のところで引いた横線より下の部分によって表示される($\alpha \in V_{\alpha+1} - V_\alpha$ であった). よって高さは集合の複雑さの水準――階数――を与えているわけである.

さて $V=U$ によって, **任意の集合 x に対し** x の階数 $\rho(x)$ が定義され,

$$x \in V_{\rho(x)+1} - V_{\rho(x)}$$

であることがわかった.

次に有用な ρ の一性質を述べよう. その他の性質は練習問題を参照されたい.

定理 3.8.8 $\rho(x)=\bigcup\{\rho(y)+1 | y\in x\}=\sup\{\rho(y)+1 | y\in x\}$.

証明 $y\in x$ なら $\rho(y)+1\le\rho(x)$ であるから $\rho(x)\ge\sup\{\rho(y)+1 | y\in x\}$. よって逆の不等式を証明する. $\rho(x)=\alpha$ についての超限帰納法による. $\alpha=0$ のとき. 明白に $0\le\sup\{\rho(y)+1 | y\in x\}$. $\alpha=\beta+1$ のとき. $x\notin V_{\beta+1}$ であるから **3.8.5** を用いて $y_1\in x\wedge\rho(y_1)=\beta$ なる y_1 の存在がいえる. $\rho(y_1)+1=\alpha$ であるから $\rho(x)\le\sup\{\rho(y)+1 | y\in x\}$. おしまいに $\alpha\in \mathrm{Lim}$ とする. $\forall\beta<\alpha\ \exists y\in x[\beta<\rho(y)]$ なることがいえれば十分. そこでもしそうでないとする. 極限数の性質を用いて, $x\in V_\alpha$ なることが導かれるから $\rho(x)=\alpha$ に反する. ▨

上で, $V=U$ が正則性の公理と深いかかわりがあると述べた. 事実これの証明には $\in$-帰納法が用いられている. ところが実は $V=U$ は次の意味で正則性公理と同値なのである. ZFC* は **3.6.8** で述べた公理系である.

定理 3.8.10 ZFC* $\vdash V=U\leftrightarrow$ (Ⅷ)

証明 $V=U\rightarrow$ (Ⅷ)を証明すればよい. $a\in V$, $a\neq\phi$ なる任意の a をとる. 仮定により $\rho(a)=\alpha$ なる α が存在する. $a\neq\phi$ であるから $x\in a$ かつ $\rho(x)$ が最小となる x をとる. $x\cap a=\phi$ である. なぜなら, もし $y\in x\cap a$ なら $y\in a$, $\rho(y)<\rho(x)$ であるから x の選び方に反する. ゆえに正則性の公理が成り立つ.

▨

問 2. 次を証明せよ.

1) $\rho(x)=0\leftrightarrow x=0$

2) $\rho(x)=1\leftrightarrow x=1$

3) $x\subseteq y\rightarrow\rho(x)\le\rho(y)$.

問 3. $\rho(x)<\rho(y)$ でも $x\in y$ とは限らない. 反例を示せ.

問 4. $\{\langle x, y\rangle | \rho(x)<\rho(y)\}$ は有基底的関係であることを示せ. ▨

ここで, $\rho(x)$ **に関する超限帰納法**を述べておこう.

$$yRx\leftrightarrow\rho(y)<\rho(x)$$

によって R を定義すると問4により R は有基底的関係である. この R に関する帰納法と帰納的定義を $\rho(x)$ に関する(超限)帰納法, $\rho(x)$ に関する(超限)帰納的定義という. これは応用上, 大切な方法である.

3.9 整列可能定理

集合 u がある関係 r によって整列されるならば, u は**整列可能**であるという. (この場合 u を整列する方法, すなわち r の選び方は多様である.) カントルはどんな集合も整列可能であると信じ, それを証明しようと努力した. 文献[25]

によれば「ずっと後になって，われわれが超限カルジナル数†の増加系列について概観し，それらの間の内部関係を理解できるようになったときはじめて，次の定理の正しさが帰結される：$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を任意の2つのカルジナル数とすると，$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}$ か，$\mathfrak{a}<\mathfrak{b}$ か $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ かのいずれか一つが成立する」
と述べてある．これをいいかえると

整列可能定理 すべての集合は整列可能である．▨

となる(このことは第4章で明らかになる)．しかしカントルは後，デデキントへこれが未だ証明されていないことを認める内容の手紙を書き送っている(1899年)．整列可能定理は手紙より遅れること5年にしてツェルメロによって初めて証明された．ツェルメロの証明は彼自身言及しているように“無限個の空でない集合たちが与えられていると，その各集合にそれに属する1要素を対応させる写像が常に存在する”という原理にもとづいている．これは選択公理の一形である．早速，当時の新進気鋭の数学者ボレル，ベール，ルベーグ，アダマール等によって，この仮定に関しいろいろ意見交換がなされた．結局のところ，この原理は任意選択を無限回行うことを許すことになるから確たる根拠ある原理とは認め難く，したがって整列可能定理は証明されたことにならない；ツェルメロの証明は“選択公理から整列可能定理が証明される”ことを示したに過ぎない，という結論に至った．

各々が2要素からなる可算個の集合族の場合でさえ，上の選択公理におけるあの写像はつくれそうにないことがすでに **2.6** に示してある．実際，選択公理が，その否定も，(選択公理を除いた公理系) ZF から証明することができないことは後年(1963年と1938年)になってようやく判明した．これについては後章で触れるであろう．ここでは，ツェルメロのように選択公理を仮定して，整列可能定理を証明することにする．ツェルメロはその第2証明(1908年)において選択公理を次の形に定式化した．これを論理記号を用いて記述しよう：

$$\forall u\, \exists f[(f\colon \mathcal{P}(u)-\{\phi\} \to u) \land \forall v \subseteq u(v \neq \phi \to f`v \in v)].$$

これを公理(IX″)として引用しよう．

定理 3.9.1 ZF⊢(IX) ↔ (IX″)．▨

問 1. **3.9.1** を証明せよ．▨

定理 3.9.2 ZF ⊢ (IX) ↔ 整列可能定理

証明 まず ZFC ⊢ 整列可能定理 を証明する．u を任意の集合とし

---

† 超限カルジナル数(超限基数)については次章を参照．

$$u' = \begin{cases} u & \text{if} \ \ \phi \in u \\ u \cup \{\phi\} & \text{if} \ \ \phi \notin u \end{cases}$$

とする．(IX″)によって $\mathscr{P}(u')$ の選択関数 f が存在する．f を拡張して $f`\phi = \phi$ としておく．

$$\langle x, y\rangle \in G \equiv y = f`(u' - \mathrm{Rng}(x))$$

なるクラス関数 G に対し超限帰納法による定義によって

$$\forall \alpha[F`\alpha = G`(F \restriction \alpha)]$$

なる OR 上のクラス関数 F が一意的に存在する．この F は

(1)　　$$\forall \alpha[F`\alpha = f`(u' - F``\alpha) \wedge F``\alpha \subseteq u']$$

を満足する．このとき，

(2)　　$$F``\alpha = u'$$

をみたす順序数 α が存在することを証明しよう．そこで(2)が成り立つような α が存在しないとする．そのとき

$$\forall \alpha(u' - F``\alpha \neq \phi)$$

$\alpha < \beta$ ならば $F`\alpha \in F``(\alpha+1) \subseteq F``\beta$. $u' - F``\beta \neq \phi$ なるゆえ $F`\beta = f`(u' - F``\beta) \in u' - F``\beta$ であるから $F`\beta \notin F``\beta$. ゆえに $F`\alpha \neq F`\beta$. よって F は OR から u' への単射を与え，したがって u' が固有クラスでなければならない．不合理．ゆえに(2)をみたす α が存在しなければならない．よって(2)をみたす最小の順序数を ξ とする：

$$F``\xi = u', \qquad \forall \alpha < \xi(F``\alpha \neq u').$$

このとき，$\alpha < \beta < \xi$ なら $F`\alpha \neq F`\beta$ が上と同様にして証明されるから $F \restriction \xi$ は ξ から u' への全単射である．そこで

$$\langle x, y\rangle \in r \leftrightarrow \exists \alpha \exists \beta[\alpha \in \xi \wedge \beta \in \xi \wedge \alpha < \beta \wedge F`\alpha = x \wedge F`\beta = y]$$

とすれば，r は集合 u' を整列するから u' は整列可能，したがってもちろん u は整列可能である．

今度は ZF $\vdash$ 整列可能定理 → (IX) を証明する．(IX″)を導けばよい．u を空でない任意の集合とする．仮定により u を整列する全順序 r が存在する，**3.4.5** (これは AC なしに得られる) により $\langle u, <_r\rangle \cong \langle \xi, \in\rangle$ なる順序数 ξ が存在する．この一意的に定まる同型対応を $g: \xi \longrightarrow u$ とする．このとき $\mathscr{P}(u)$ の選択関数 f は次のように定義される：

$$\langle x, y\rangle \in f \equiv \phi \neq x \subseteq u \wedge \exists \alpha[\alpha \in \xi \wedge g`\alpha \in x \wedge \forall \beta \in \alpha(g`\beta \notin x) \wedge y = g`\alpha].$$

(直観的意味は：g によって u は

$$u = \{g`0, g`1, \cdots, g`\alpha, \cdots\}_{\alpha < \xi}$$

のように“超限的に”並べられる．このとき $\phi \neq x \subseteq u$ なる x に対し，$f‘x$ は $g‘\alpha \in x$ となる最小の α に対する $g‘\alpha$ であると定義されているのである．）f が $\mathcal{P}(u)$ の選択関数になっていることは明白であろう．▨

なお，選択公理について更に一言しておこう．選択公理はその後，色々な数学を展開する上で重要な働きをする公理であることがわかり，また種々な同値形が与えられ，場合々々に応じて便利に利用されている．同値な命題のうち最もポピュラーなのは**極大原理**または**ツォルン**（Zorn）**の補題**と呼ばれる一連の命題であろう．その一形は

ツオルンの補題　順序集合 u に対し，u の任意の全順序部分集合が上に有界ならば（このとき u は**帰納的に順序づけられた集合**と呼ばれる），u は極大元をもつ．▨

これらについては既刊の集合論の書物などに載っているから，本書では省略することにする．なお，より一層詳しいことは例えば[20]，[30]，[31]などを参照されたい．

3.10 順序数の演算

順序数は，自然数の一つの拡張と考えられる†から，これらの間に演算を定義しようと考えるのは自然である．本節では，順序数の間に加法と乗法を定義する．

定義 3.10.1　$\langle u_1, r_1\rangle$, $\langle u_2, r_2\rangle$ を2つの全順序集合で，r_1, r_2 は非反射型とする．

（i）　$u_1 \cap u_2 = \phi$ のとき，$r_1 \oplus r_2 \subseteq (u_1 \cup u_2)^2$ を次のように定義する：

$$\langle x, y\rangle \in r_1 \oplus r_2 \equiv (x, y \in u_1 \wedge \langle x, y\rangle \in r_1) \vee (x, y \in u_2 \wedge \langle x, y\rangle \in r_2) \vee (x_1 \in u_1 \wedge y \in u_2).$$

このとき $\langle u_1 \cup u_2, r_1 \oplus r_2\rangle$ を2つの全順序構造 $\langle u_i, r_i\rangle$ の**和**という．

（ii）　$r_1 * r_2 \subseteq (u_1 \times u_2)^2$ を次のように定義する：

$$\langle\langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle\rangle \in r_1 * r_2 \equiv \langle x_1, x_2\rangle, \langle y_1, y_2\rangle \in u_1 \times u_2 \wedge [(\langle x_1, y_1\rangle \in r_1 \wedge x_2 = y_2) \vee (\langle x_2, y_2\rangle \in r_2)].$$

このとき $\langle u_1 \times u_2, r_1 * r_2\rangle$ を2つの全順序構造 $\langle u_i, r_i\rangle$ の**積**という．また $r_1 * r_2$ を r_1, r_2 に関する**辞書式順序**という．

† むしろ1位，2位，3位，… といった自然数のもつ順序としての性質の一般化として順序数概念が登場したといえる．

r_1, r_2 が非反射的でない場合も同様に和，積が定義される．▨

定理 3.10.2 上の定義で，r_1, r_2 が非反射型のとき，$r_1 \oplus r_2$, $r_1 * r_2$ は非反射型全順序である．

証明 $r_1 \oplus r_2$ が全順序であること，$r_1 * r_2$ が順序であること，およびこれらが非反射型であることの証明は読者の演習にゆだねる．$r_1 * r_2$ が**連結している**こと，すなわち $u_1 \times u_2$ の任意の2要素が，$r_1 * r_2$ に関し比較可能であることの証明：簡単のため r_i を $<_i$ で，$r_1 * r_2$ を $<_*$ で表わすことにする．任意の異なる2要素 $\langle x_1, x_2\rangle$, $\langle y_1, y_2\rangle \in u_1 \times u_2$ をとる．$x_2 = y_2$ なら $x_1 \neq y_1$, よって $x_1 <_1 y_1$ か $y_1 <_1 x_1$. 前者なら $\langle x_1, x_2\rangle <_* \langle y_1, y_2\rangle$, 後者なら $\langle y_1, y_2\rangle <_* \langle x_1, x_2\rangle$. また，$x_2 <_2 y_2$ か $y_2 <_2 x_2$ かに従って $\langle x_1, x_2\rangle <_* \langle y_1, y_2\rangle$ か $\langle y_1, y_2\rangle <_* \langle x_1, x_2\rangle$ である．▨

定理 3.10.3 $\langle u_1, r_1\rangle$, $\langle u_2, r_2\rangle$ が整列集合ならば，$\langle u_1 \cup u_2, r_1 \oplus r_2\rangle$ および $\langle u_1 \times u_2, r_1 * r_2\rangle$ は整列集合である．ただし前者の場合，$u_1 \cap u_2 = \phi$ とする．

証明 r_i は非反射型とする．(i) $u_1 \cap u_2 = \phi$ とする．$\phi \neq w \subseteq u_1 \cup u_2$ なる任意の集合 w をとる．$w \cap u_1 \neq \phi$ なら，$w \cap u_1$ の r_1-最小元は w の $r_1 \oplus r_2$-最小元である．$w \cap u_1 = \phi$ なら，$w \cap u_2$ $(\neq \phi)$ の r_2-最小元は w の $r_1 \oplus r_2$-最小元である．よって $r_1 \oplus r_2$ は $u_1 \cup u_2$ を整列する．(ii) $\phi \neq w \subseteq u_1 \times u_2$ なる任意の集合 w をとる．u_2 の部分集合 $\{x_2 | \exists x_1(\langle x_1, x_2\rangle \in w)\}$ の r_2-最小元を a_2 とする．これに対し u_1 の部分集合 $\{x_1 | \langle x_1, a_2\rangle \in w\}$ の r_1-最小元を a_1 とする．このとき $\langle a_1, a_2\rangle$ は w の $r_1 * r_2$-最小元である．よって $r_1 * r_2$ は $u_1 \times u_2$ を整列する．▨

定義 3.10.4 2つの順序数 α, β が与えられているとき，

$$\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle u_1, r_1\rangle, \quad \langle \beta, \in \rangle \cong \langle u_2, r_2\rangle, \quad u_1 \cap u_2 = \phi^{\dagger}$$

なる順序集合 $\langle u_i, r_i\rangle$ $(i=1, 2)$ を任意にとる．**3.10.3, 3.4.5** によって

$$\langle u_1 \cup u_2, r_1 \oplus r_2\rangle \cong \langle \gamma, \in \rangle, \qquad \langle u_1 \times u_2, r_1 * r_2\rangle \cong \langle \delta, \in \rangle$$

なる順序数 γ, δ がそれぞれ一意的に存在する．γ, δ は上の $\langle u_i, r_i\rangle$ の選び方に無関係である．このとき

$$\alpha + \beta = \gamma, \qquad \alpha \cdot \beta = \delta$$

と定義し，それぞれ2つの順序数 α, β の**和**，**積**という†．▨

---

† 互いに素となるように u_i を選ぶには例えば $u_i = \{\langle \xi, i\rangle | \xi < \alpha\}$ $(i=1, 2)$ とし $\langle \xi, i\rangle <_{r_i} \langle \eta, i\rangle \leftrightarrow \xi < \eta$ なる r_i をとればよい．

例 1. 明らかに $\langle \omega, \in \rangle \cong \langle \omega - \{0\}, \in \rangle$ であり，

$$(\in | \{0\}) \oplus (\in | (\omega - \{0\})) = \in | \omega$$

であるから $\langle 1+\omega, \in \rangle \cong \langle \omega, \in \rangle$，したがって $1+\omega=\omega$. ▨

例 2. 順序数 α と 1 に対し，上で定義した $\alpha+1$ は **3.3.15** で定義した $\alpha+1$ すなわち $\alpha \cup \{\alpha\}$ に等しい．なぜなら例 1 のように考えて，和としての $\alpha+1$ は

$$\langle \gamma, \in \rangle \cong \langle \alpha \cup \{\alpha\}, (\in | \alpha) \oplus (\in | \{\alpha\}) \rangle \cong \langle \alpha \cup \{\alpha\}, \in \rangle$$

なる一意的な順序数 γ である．よって $\gamma = \alpha \cup \{\alpha\}$，すなわち

$$\text{和 } \alpha+1 = \alpha \cup \{\alpha\} = \text{後者 } \alpha+1$$

である．したがって $\alpha+1 \neq \alpha$. 特に $\omega+1 \neq \omega$. 例 1 によって $\omega+1 \neq 1+\omega$. よって $+$ についての交換法則は成立しない．▨

例 3. 定義によって $2=1+1$, $3=2+1$, $\cdots$ であった．後述の **3.10.5** により $+$ は結合法則をみたすから

$$(\omega+1)+1 = \omega+(1+1) = \omega+2$$

$$(\omega+2)+1 = \omega+(2+1) = \omega+3, \ \cdots$$ ▨

例 4. $a = \{\omega+n | n \in \omega\}$ とすると $\langle a, \in \rangle \cong \langle \omega, \in \rangle$ であるから $\omega+\omega$ は $\langle \gamma, \in \rangle \cong \langle \omega \cup a, (\in | \omega) \oplus (\in | a) \rangle = \langle \omega \cup a, \in \rangle$ なる一意的な順序数 γ である．一方 $\omega \cdot 2$ は

$$\langle \delta, \in \rangle \cong \langle \omega \times 2, <_* \rangle$$

なる一意的な順序数 δ である．ここに $<_* = (\in | \omega) * (\in | 2)$. いま，

$$f : \omega \cup a \longrightarrow \omega \times 2$$

を $f`n = \langle n, 0 \rangle$, $f`(\omega+n) = \langle n, 1 \rangle$ $(n \in \omega)$ によって定義すれば，f によって $\langle \omega \cup a, \in \rangle \cong \langle \omega \times 2, <_* \rangle$ となる．ゆえに

$$\omega+\omega = \omega \cdot 2.$$ ▨

問 1. $2 \cdot \omega = \omega$ を証明せよ．$\omega \neq \omega+\omega$ であるから $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$ となる．よって積 $\cdot$ についての交換法則は成立しない．▨

定理 3.10.5 α, β, γ が順序数であるとき，

(1) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$ (2) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

(3) $\alpha \cdot (\beta+\gamma) = (\alpha \cdot \beta)+(\alpha \cdot \gamma)$ (4) $\alpha+0 = 0+\alpha = \alpha$

(5) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$ (6) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$.

---

† 積の場合は $u_1 \cap u_2 = \phi$ という必要はない．この場合直接 $u_1 = \alpha$, $u_2 = \beta$ として $\langle \alpha \times \beta, \in * \in \rangle$ を考えればよい．これは順序数の対 $\langle \xi, \eta \rangle$ $(\xi < \alpha, \eta < \beta)$ たちの辞書式順序である．

証明 $\langle\alpha, \in\rangle\cong\langle u, r\rangle$, $\langle\beta, \in\rangle\cong\langle v, s\rangle$, $\langle\gamma, \in\rangle\cong\langle w, t\rangle$ とする．和を考えるときは u, v, w は互いに素であるとしておく．

（1） $\langle u\cup v\cup w, (r\oplus s)\oplus t\rangle\cong\langle u\cup v\cup w, r\oplus(s\oplus t)\rangle$ を証明したい．$a=u\cup v\cup w$ とおく．$x, y\in a$ に対し

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle\in(r\oplus s)\oplus t &\leftrightarrow (\langle x, y\rangle\in r)\vee(x\in u\wedge y\in v)\vee(x, y\in v\wedge\langle x, y\rangle\in s)\vee \\ &\qquad (x\in u\cup v\wedge y\in w)\vee(\langle x, y\rangle\in t) \\ &\leftrightarrow (\langle x, y\rangle\in r)\vee(x\in u\wedge y\in v\cup w)\vee(\langle x, y\rangle\in s\oplus t) \\ &\leftrightarrow \langle x, y\rangle\in r\oplus(s\oplus t).\end{aligned}$$

よって恒等写像が所要の同型対応を与える．

(2)～(6)も同様に論じられる．詳細は読者の演習にゆだねる．▨

可換法則が成立しないことは既に示した．(3)に類似なもう一つの分配法則

$$(\beta+\gamma)\cdot\alpha=\beta\cdot\alpha+\gamma\cdot\alpha$$

も成立**しない**．その反例は

$$(\omega+1)\cdot 2\neq\omega\cdot 2+1\cdot 2$$

で与えられる．なぜなら $(\omega+1)\cdot 2=\omega\cdot 2+1$ であるが，$\omega\cdot 2+1\cdot 2=\omega\cdot 2+2$ であり，これらは確かに異なる順序数である．

問 2. 任意の順序数 α について $\alpha+1\neq\alpha+2$ であることを証明せよ．一般に，$\beta\neq\gamma$ ならば $\alpha+\beta\neq\alpha+\gamma$ である．

問 3. $\beta<\gamma\rightarrow\alpha+\beta<\alpha+\gamma$．したがって特に $\gamma>0$ なら $\alpha<\alpha+\gamma$．▨

3.11 順序数の算術

順序数の加法，乗法は超限帰納法によっても次のように定義される．$\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ は順序数を表わす．

定義 3.11.1 （i） 加法 + の定義："+1" は **3.3.15** のもの．

$$\begin{cases}\alpha+0=\alpha \\ \alpha+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+1 \\ \alpha+\lambda=\sup\{\alpha+\beta\mid\beta<\lambda\},\ \lambda\in\mathrm{Lim}\ のとき.\end{cases}$$

（ii） 積・の定義：

$$\begin{cases}\alpha\cdot 0=0 \\ \alpha\cdot(\beta+1)=\alpha\cdot\beta+\alpha \\ \alpha\cdot\lambda=\sup\{\alpha\cdot\beta\mid\beta<\lambda\}, \qquad \lambda\in\mathrm{Lim}\ のとき.\end{cases}$$ ▨

問 1. **3.11.1** を用いて次の不等式を証明せよ．

$$\beta<\gamma\rightarrow\alpha+\beta<\alpha+\gamma.$$

特に $0<\gamma\rightarrow\alpha<\alpha+\gamma$ である．▨

定理 3.11.2 **3.10.4** による $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ はそれぞれ **3.11.1** による $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$ に等しい.

証明 **3.10.4** による $+$ を $+_1$ で, **3.11.1** による $+$ を $+_2$ で表わそう. β についての超限帰納法によって

(1) $$\alpha+_2\beta=\alpha+_1\beta$$

なることを証明する. $\beta=0$ のとき. $\alpha+_2 0=\alpha$, $\langle\alpha+_1 0,\ \epsilon\rangle\cong\langle\alpha\cup\phi,\ (\epsilon|\alpha)\oplus\phi\rangle\cong\langle\alpha,\ \epsilon\rangle$ であるから $\alpha+_1 0=\alpha$. ゆえに $\alpha+_2 0=\alpha+_1 0$. β に対し(1)が成立すると仮定し, $\beta+1$ の場合を考える. 定義と仮定によって $\alpha+_2(\beta+1)=(\alpha+_2\beta)+1=(\alpha+_1\beta)+1$. 他方, $+_1$ の結合法則によって $\alpha+_1(\beta+1)=\alpha+_1(\beta+_1 1)=(\alpha+_1\beta)+_1 1=(\alpha+_1\beta)+1$. ゆえに $\alpha+_2(\beta+1)=\alpha+_1(\beta+1)$. おしまいに $\beta=\lambda\in\mathrm{Lim}$ で, $\xi<\lambda$ に対し $\alpha+_2\xi=\alpha+_1\xi$ が成立しているとする. よって

$$\alpha+_2\lambda=\sup\{\alpha+_2\gamma\,|\,\gamma<\lambda\}=\sup\{\alpha+_1\gamma\,|\,\gamma<\lambda\}.$$

$\alpha+_2\lambda\subseteq\alpha+_1\lambda$ なること: 任意の $\delta\in\alpha+_2\lambda$ をとる. $\delta<\alpha$ ならもちろん $\delta\in\alpha+_1\lambda$ であるから $\delta\geq\alpha$ の場合を考えればよい. sup の意味から $\delta\leq\alpha+_2\xi=\alpha+_1\xi$ なる $\xi<\lambda$ が存在する. 等号は帰納法の仮定による. よって $\delta=\alpha+_1\gamma$ なる $\gamma<\lambda$ が存在する. (演習問題 III, 1)[†] よって, 前節問 3 により $\delta<\alpha+_1\lambda$. ゆえに $\alpha+_2\lambda\subseteq\alpha+_1\lambda$. $\alpha+_1\lambda\subseteq\alpha+_2\lambda$ なること: 任意に $\delta\in\alpha+_1\lambda$ をとる. $\delta<\alpha$ なら $\delta<\alpha+_2\lambda$ である(問 1 による)から $\delta\geq\alpha$ とする. よって $\delta=\alpha+_1\gamma$ なる $\gamma<\lambda$ が存在する. 帰納法の仮定と問 1 によって

$$\delta=\alpha+_1\gamma=\alpha+_2\gamma<\alpha+_2\lambda.$$

ゆえに $\alpha+_1\lambda\subseteq\alpha+_2\lambda$. かくて $\alpha+_2\lambda=\alpha+_1\lambda$. これで超限帰納法が完成し, (1)が証明された.

積について, 2 通りの $\alpha\cdot\beta$ の定義が同一の順序数を与えることの証明は読者の演習にゆだねる. ▨

定義 3.11.3 (**順序数のべき乗**) α, β が順序数のとき, α^β を次のように定義する.

$$\begin{cases}\alpha^0=1, & \alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha\\ \alpha^\lambda=\sup\{\alpha^\xi\,|\,\xi<\lambda\} & (\lambda\in\mathrm{Lim})\end{cases}$$ ▨

定理 3.11.4 $\alpha,\beta\in\mathrm{OR}$ とする. 各 $\xi<\beta$ に対し $\alpha_\xi=\alpha$ とし, 直積集合

$$\bigtimes_{\xi<\beta}\alpha_\xi=\{f\,|\,f:\beta\longrightarrow\bigcup\{\alpha_\xi\,|\,\xi<\beta\}\wedge\forall\xi<\beta(f`\xi\in\alpha_\xi)\}^{\dagger\dagger}$$

をつくり, その部分集合

---

† $\beta>0$ とする. $\alpha\leq\gamma<\alpha+_1\beta$ ならば $\exists\xi<\beta(\gamma=\alpha+_1\xi)$.

†† これは任意の α_ξ に対する定義である. $\alpha_\xi=\alpha$ の場合はより簡単に表示できる.

$$u=\{f\in \bigtimes_{\xi<\beta}\alpha_\xi \mid f \text{ の値は有限個を除いて } 0 \text{ である}\}$$

を考える．$f\neq g$ なる $f,\ g\in u$ に対し $f`\xi\neq g`\xi$ となる最大の ξ を $\xi_{(f,g)}$ で表わす．$<\subseteq u^2$ を

$$f<g \equiv f`\xi_{(f,g)}<g`\xi_{(f,g)}$$

によって定義する．このとき $<$ は u 上の整列順序であり（**末尾違い順序**という），したがって

$$\langle\delta,\ \in\rangle\cong\langle u,\ <\rangle$$

なる順序数 δ が一意的に定まる．このとき

$$\alpha^\beta=\delta.$$

証明　演習問題 III の 6. ▨

ここで順序数についての演算の諸性質を(問などで既述のものを含めて)一括し掲げる．

1)　$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$.

2)　$(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.

3)　$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=(\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma)$.

4)　$\alpha+0=0+\alpha=\alpha$.

5)　$\alpha\cdot 1=1\cdot\alpha=\alpha$.

6)　$\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$.

7)　$\alpha+\beta=\alpha+\gamma\leftrightarrow\beta=\gamma$.

8)　$\alpha\cdot\beta=\alpha\cdot\gamma\leftrightarrow\beta=\gamma$　　（ただし $\alpha>0$）．

9)　$\alpha^\beta=\alpha^\gamma\leftrightarrow\beta=\gamma$　　（ただし $\alpha>1$）．

10)　$\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$.

11)　$(\alpha^\beta)^\gamma=\alpha^{\beta\cdot\gamma}$.

12)　$\alpha+\beta<\alpha+\gamma\leftrightarrow\beta<\gamma$.

13)　$\alpha+\gamma<\beta+\gamma\rightarrow\alpha<\beta$.

14)　$\alpha<\beta\rightarrow\alpha+\gamma\leq\beta+\gamma$.

15)　$\alpha<\beta\rightarrow\alpha\cdot\gamma\leq\beta\cdot\gamma$.

16)　$\alpha<\beta\rightarrow\alpha^\gamma\leq\beta^\gamma$.

17)　$\alpha^\beta<\alpha^\gamma\leftrightarrow\beta<\gamma$　　（ただし $\alpha>1$）．

18)　$\alpha^\gamma<\beta^\gamma\rightarrow\alpha<\beta$.

19)　$\beta\geq 1\rightarrow\alpha^\beta\geq\beta$.

3.12 カントルの標準形

本節では，自然数の p-進展開表示を一般化して順序数の α-進展開を考える．まず，商と剰余の関係を示す．

定理 3.12.1 任意の順序数 α, β (ただし $\beta>0$ とする)に対し

(1) $$\alpha=\beta\cdot\gamma+\delta,\quad \delta<\beta,\quad \gamma\leq\alpha$$

なる順序数 γ, δ が一意的に存在する．

証明 $\beta\cdot(\alpha+1)>\alpha$ であるから，α は辞書式順序構造 $\langle\beta\times(\alpha+1), <_*\rangle$ (**3.10**)のある始切片と同型である．それはある $\gamma<\alpha+1$ に対し β を γ 型に並べたもののあとへ $\delta<\beta$ なるある δ をおいた系列に相似である：

$$\overbrace{\beta,\ \beta,\ \beta,\ \cdots}^{\gamma\text{ 型}}\qquad \delta$$

これは $\beta\cdot\gamma+\delta$ なる順序数を表わす．よって $\alpha=\beta\cdot\gamma+\delta$, $\delta<\beta$, $\gamma\leq\alpha$．表現の一意性を示すために(1)のほかに

$$\alpha=\beta\cdot\gamma'+\delta',\quad \delta'<\beta,\quad \gamma'\leq\alpha$$

であるとしよう．$\gamma<\gamma'$ なら $\gamma+1\leq\gamma'$，したがって

$$\alpha=\beta\cdot\gamma+\delta<\beta\cdot\gamma+\beta=\beta\cdot(\gamma+1)\leq\beta\cdot\gamma'\leq\beta\cdot\gamma'+\delta'=\alpha$$

となり不合理．$\gamma'<\gamma$ としても同様に不合理となる．ゆえに $\gamma=\gamma'$ である．そのとき $\beta\cdot\gamma+\delta=\beta\cdot\gamma+\delta'$ となるから $\delta=\delta'$ でなければならない．▨

定理 3.12.2 $\alpha>1$ とする．任意の順序数 $\gamma>0$ は

(2) $$\gamma=\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\alpha^{\beta_1}\cdot\alpha_1+\cdots+\alpha^{\beta_n}\cdot\alpha_n$$

(3) $$0<\alpha_i<\alpha\ (i\leq n),\qquad \gamma\geqq\beta_0>\beta_1>\cdots>\beta_n\geq 0^{\dagger}$$

という形に一意的に表わされる．ここに n は自然数である．

証明 $\gamma>0$ を与える．$\alpha^\gamma\geq\gamma$ である．もし $\alpha^\gamma=\gamma$ ならば，$n=0$, $\beta_0=\gamma$, $\alpha_0=1$ とすると $\gamma=\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0$ となる．$\alpha^\gamma>\gamma$ の場合．$\alpha^\nu>\gamma$ なる最小の順序数 ν をとる．$0<\nu\leq\gamma$ である．このとき $\nu\in\mathrm{Suc}$ である．[なぜなら，もし $\nu\in\mathrm{Lim}$ なら $\alpha^\nu=\alpha^{\sup\{\xi|\xi<\nu\}}=\sup\{\alpha^\xi|\xi<\nu\}>\gamma$ であるから $\xi<\nu\wedge\alpha^\xi>\gamma$ なる ξ がある．これは ν の最小性に反する．] よって $\nu=\beta_0+1$ とかける．このとき

(4) $$\alpha^{\beta_0}\leq\gamma<\alpha^{\beta_0+1}$$

となるから前定理によって

(5) $$\gamma=\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\eta_0,\qquad \eta_0<\alpha^{\beta_0}$$

---

† 一般に $\gamma>\beta_0$ とすることはできない．例2参照．

なる α_0, η_0 がただ一通り存在する．(4)から $\alpha_0<\alpha$．また $\alpha^{\beta_0}\leq\gamma$ より $\gamma\geq\beta_0$．したがって α_0, β_0 は条件(3)をみたす．

$\eta_0=0$ なら(5)は(2)の形をもつ．

$\eta_0>0$ の場合．γ に対する上の議論を η_0 に適用することによって

$$\eta_0=\alpha^{\beta_1}\cdot\alpha_1+\eta_1, \qquad \eta_1<\alpha^{\beta_1}$$

なる β_1, α_1, η_1 が得られ，$\alpha_1<\alpha$, $\eta_0\geq\beta_1$ である．$\alpha^{\beta_0}>\eta_0\geq\alpha^{\beta_1}$ であるから $\beta_0>\beta_1$ となる．よって β_1, α_1 は条件(3)をみたす．以下，この操作を繰り返すと

$$\alpha>\eta_0>\eta_1>\cdots$$

であるから，この操作は有限回で終って，例えば n 回とすると $\eta_n=0$ となる．各 $i<n$ について

$$\eta_i=\alpha^{\beta_{i+1}}\cdot\alpha_{i+1}+\eta_{i+1}, \qquad \eta_{i+1}<\alpha^{\beta_{i+1}}$$

であり，α_{i+1}, β_{i+1} は条件(3)をみたす．かくて γ は(2)，(3)なる形に表わすことができる．

一意性を証明するためにまず準備として

(6)　　　　(2),(3) ならば　$\gamma<\alpha^{\beta_0+1}$

であることを示す．$k\leq n$ に対し $\gamma_k=\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\cdots+\alpha^{\beta_{k-1}}\cdot\alpha_{k-1}+\alpha^{\beta_k+1}$ とおくと $\gamma_k>\gamma$ である．

(7)　　　　$\gamma_k\leq\alpha^{\beta_0+1}$　　$(k=0, 1, 2, \cdots, n)$

を示せば，$\gamma<\gamma_n\leq\alpha^{\beta_0+1}$ であるから(6)が成り立つことがわかる．$\gamma_0=\alpha^{\beta_0+1}$ であるから $k=0$ のとき(7)が成り立つ．帰納法の仮定として $k<n$ に対し(7)が成立するとする．そのとき

$$\begin{aligned}\gamma_{k+1}&=\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\cdots+\alpha^{\beta_k}\cdot\alpha_k+\alpha^{\beta_{k+1}+1}\\&\leq\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\cdots+\alpha^{\beta_k}\cdot\alpha_k+\alpha^{\beta_k} \qquad (\because\ \beta_{k+1}+1\leq\beta_k)\\&=\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\cdots+\alpha^{\beta_{k-1}}\cdot\alpha_{k-1}+\alpha^{\beta_k}\cdot(\alpha_k+1)\\&\leq\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\cdots+\alpha^{\beta_{k-1}}\cdot\alpha_{k-1}+\alpha^{\beta_k}\cdot\alpha \qquad (\because\ \alpha_k+1\leq\alpha)\\&=\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\cdots+\alpha^{\beta_{k-1}}\cdot\alpha_{k-1}+\alpha^{\beta_k+1}\\&=\gamma_k\leq\alpha^{\beta_0+1} \qquad (\text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

これで(7)が証明されたから，(6)が成り立つ．さて(2)，(3)なる表現の一意性を証明するために，γ についての帰納法を用いる．γ より小さい順序数については一意性が成り立つものとして γ について考える．(2)，(3)のほかに

$$\gamma=\alpha^{\beta_0'}\cdot\alpha_0'+\cdots+\alpha^{\beta_k'}\cdot\alpha_k'$$

$$0<\alpha_i'<\alpha\ (i\leq k), \qquad \gamma\geq\beta_0'>\cdots>\beta_k'\geq0$$

なる表現をもつとする．$\eta=\alpha^{\beta_1}\cdot\alpha_1+\cdots+\alpha^{\beta_n}\cdot\alpha_n$ とすると $\eta<\alpha^{\beta_1+1}\leq\alpha^{\beta_0}$ である．$\eta'=\alpha^{\beta_1'}\cdot\alpha_1'+\cdots+\alpha^{\beta_k'}\cdot\alpha_k'$ とすると $\eta'<\alpha^{\beta_1'+1}\leq\alpha^{\beta_0'}$ である．$\beta_0<\beta_0'$ とすれば，

$$\gamma=\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\eta<\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\alpha^{\beta_0}=\alpha^{\beta_0}\cdot(\alpha_0+1)\leq\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha=\alpha^{\beta_0+1}\leq\alpha^{\beta_0'}\leq\alpha^{\beta_0'}\cdot\alpha_0'\leq\gamma$$

となり不合理．$\beta_0'<\beta_0$ としても同様に不合理が生ずる． よって $\beta_0=\beta_0'$ でなければならない．そのとき，もし $\alpha_0<\alpha_0'$ ならば

$$\gamma=\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\eta<\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\alpha^{\beta_0}=\alpha^{\beta_0}\cdot(\alpha_0+1)\leq\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0'\leq\gamma$$

となり不合理．$\alpha_0'<\alpha_0$ としても同様に不合理が生ずる． よって $\alpha_0=\alpha_0'$ でなければならない．かくて

$$\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\eta=\gamma=\alpha^{\beta_0}\cdot\alpha_0+\eta'.$$

したがって $\eta=\eta'<\gamma$．η，η' については帰納法の仮定によって一意性が成り立つので，結局 γ に対する表現も一意的でなければならない．▨

(2)，(3)なる表現を γ の(底 α に関する)**カントル標準形**という．

例 1. $\alpha=\omega$ の場合．$\gamma>0$ は

$$\gamma=\omega^{\beta_0}\cdot m_0+\omega^{\beta_1}\cdot m_1+\cdots+\omega^{\beta_n}\cdot m_n$$
$$(m_i \text{ は正自然数，} \gamma\geq\beta_0>\beta_1>\cdots>\beta_n\geq 0)$$

という形になる．▨

例 2. $\omega^{(1)}=\omega$, $\omega^{(n+1)}=\omega^{\omega^{(n)}}$ $(n\in\omega)$ とし

$$\varepsilon_0=\sup\{\omega^{(n)}\mid n\in\omega\}$$

と定義する．みやすく書くと

$$\varepsilon_0=\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

である．ε_0 は方程式

$$(8)\qquad \varepsilon_0=\omega^{\varepsilon_0}$$

をみたす．よって ε_0 を底 ω に関するカントル標準形で表わすと，それは(8)である．それゆえ(2)，(3)において，一般に β_0 を $\beta_0<\gamma$ となるように制限することはできないことがわかる．一般に方程式

$$\varepsilon=\omega^{\varepsilon}$$

をみたす順序数 ε を**ユプシロン数**と呼ぶ．ε_0 はかかる最小のもの，すなわち**最初のユプシロン数**である．▨

演 習 問 題 III

1. $\beta>0\wedge\alpha\leq\gamma<\alpha+\beta\rightarrow\exists\xi<\beta[\gamma=\alpha+\xi]$ を証明せよ．

2. 無限公理を

(VI′) $$\exists a[\phi \in a \wedge \forall x(x \in a \to \{x\} \in a)]$$

とする場合，最小の極限順序数としての ω の存在を証明せよ．

3. Suc, Lim は固有クラスである．

4. α が可算順序数(すなわち $\alpha \sim \omega$ なる順序数)でかつ極限数ならば，α はある順序数の(ω 型の)増大列の極限である．

5. 型 ν の順序数の超限列 $\langle \alpha_\xi | \xi < \nu \rangle$ に対し $\langle \alpha_\xi, < \rangle \cong \langle u_\xi, r_\xi \rangle$, $\xi \neq \eta \to u_\xi \cap u_\eta = \phi$ なる整列集合の超限列 $\langle \langle u_\xi, r_\xi \rangle | \xi < \nu \rangle$ をとる．$r \subseteq u^2$ (ここに $u = \bigcup \{u_\xi | \xi < \nu\}$) を $\langle x, y \rangle \in r \equiv \exists \xi, \eta < \nu\ [x \in u_\xi \wedge y \in u_\eta \wedge ([\xi = \eta \wedge \langle x, y \rangle \in r] \vee [\xi < \eta])]$ によって定義すると $\langle u, r \rangle$ は整列集合である．これに対し $\langle \delta, < \rangle \cong \langle u, r \rangle$ なる順序数 δ が一意的に決まる．このとき

$$\sum_{\xi < \nu} \alpha_\xi = \delta$$

と定義し $\langle \alpha_\xi | \xi < \nu \rangle$ の**和**という．明らかにこの定義は $\langle u_\xi, r_\xi \rangle$ の選び方に依存しない．このとき，次を証明せよ．

1) $\nu = 2$ なら $\displaystyle\sum_{\xi < \nu} \alpha_\xi = \alpha_0 + \alpha_1$.

2) $\alpha_\xi = \alpha$ for all $\xi < \beta$ とおく．このとき $\displaystyle\sum_{\xi < \beta} \alpha_\xi = \alpha \cdot \beta$.

6. **3.11.4** を証明せよ．

7. 階数関数 ρ について次の諸事項を証明せよ．

1) $\alpha < \rho(x) \to \exists y \in x[\alpha \leq \rho(y)]$.

2) $\rho(x) \in \mathrm{Suc} \to \rho(x) = \rho(\bigcup x) + 1$.

3) $\rho(x) \in \mathrm{Lim} \to \rho(x) = \rho(\bigcup x)$.

4) $\rho(\mathscr{P}(x)) = \rho(x) + 1$.

5) $\rho(x) = \{\rho(y) | y \in \mathrm{TC}(x)\}$, したがって $\mathrm{Trans}(x) \to \rho(x) = \{\rho(y) | y \in x\}$.

8. $\mathrm{OR}^2 = \{\langle \alpha, \beta \rangle | \alpha, \beta \in \mathrm{OR}\}$, $(\mathrm{OR}^2)^2 = \{\langle \langle \alpha, \beta \rangle, \langle \gamma, \delta \rangle \rangle | \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{OR}\}$ とおく．$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{OR}$ に対し

$$\langle \alpha, \beta \rangle \lessdot \langle \gamma, \delta \rangle \equiv \max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\} \vee [\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\} \wedge (\beta < \delta \vee [\beta = \delta \wedge \alpha < \gamma])]$$

によって $\lessdot \subseteq (\mathrm{OR}^2)^2$ を定義する．

1) $\lessdot$ の始切片はすべて集合である．

2) $\lessdot$ の始切片の最初の 9 まで，$\omega + 1$ まで，$\omega + \omega + 1$ までをかけ．

3) $\langle \mathrm{OR}^2, \lessdot \rangle \cong \langle \mathrm{OR}, < \rangle$ を示せ．

注意 OR^2 上の普通の辞書式順序は 1)をみたさない．

9. Q を有理数全体の集合とし全順序集合 $\langle Q, < \rangle$ についての諸性質は既知であるとする．全順序集合 $\langle u, r \rangle$ が次の 3 条件をみたすならば，$\langle u, r \rangle \cong \langle Q, < \rangle$ であることを証明せよ．

1°) u は可算集合である(**1.6** および **4.3** を参照.)，2°) u は最初の要素も最後の要素も含まない，3°) u は稠密である，すなわち $\forall x, y \in u[x <_r y \to \exists z \in u(x <_r z <_r y)]$.

10. $P(x)$ を集合 x についての性質とする．$P(x) \wedge \forall y[y \in \mathrm{TC}(x) \to P(y)]$ であれば，x は**遺伝的に** P であるという．例えば $\mathrm{Fin}(x) \wedge \forall y[y \in \mathrm{TC}(x) \to \mathrm{Fin}(y)]$ ならば，x は遺伝的に有限であるという．(**4.2** 参照.)

1) x が遺伝的に P で，$y \in x$ ならば，y は遺伝的に P である．(したがって y の要素も遺伝的に P であり，そのまた要素も遺伝的に P である，… という性質をもつ.)

2) 遺伝的に有限な集合たち全体は V_ω に等しいことを証明せよ．

4

基数の理論

本章では，濃度，基数の概念を明確に定義する．初めに選択公理を許す立場(すなわちZFC)で述べ，後，ACがない場合(すなわちZF)にどのようにして基数を合理的に定義するかを述べる．

4.1 基　　数

第1章で触れたように，ものの個数という概念を一般化しようとして基数あるいは濃度の概念が生れたのであるが，直観的な導入は難点をもたらしてしまう．（クラスを要素として取り扱わなければならない．そのような操作が矛盾を引き起した元凶であった！）そこでわれわれは選択公理を仮定し，すでに導入されている順序数へ還元することにする．**選択公理があれば 3.9.2** および **3.4.5** によって**どんな集合もある順序数と相似になる**から，1対1対応をもって濃度が等しいと定義するからには，順序数のみを考えればよいことになる．以下，ことわりがない限り公理系 ZFC で考えているものとする．

定義 4.1.1　集合 u が集合 v に**同等**である($u \sim v$ とかく)とは，u から v への全単射が存在することである：

$$u \sim v \equiv (\exists f)[f : u \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} v].$$

[　] 内を $u \overset{f}{\sim} v$ と略記する．▒

補題 4.1.2　$\sim$ は同値関係である．

証明　恒等写像 id は $u \overset{\text{id}}{\sim} u$ を与える．$u \overset{f}{\sim} v$ なら $v \overset{f^{-1}}{\sim} u$ である．$u \overset{f}{\sim} v$, $v \overset{g}{\sim} w$ なら $u \overset{g \circ f}{\sim} w$ である．▒

定義 4.1.3 集合 u の**濃度**——これを $|u|$ で表わす——とは，u と同等な順序数のうち最小のものである：

$$|u| \in \mathrm{OR} \wedge |u| \sim u \wedge \forall \alpha(\alpha < |u| \rightarrow \neg(\alpha \sim u)).$$ ▨

定理 4.1.4 各集合 u に対し u の濃度 $|u|$ は一意的に存在する．したがって

$$u \longmapsto |u|$$

は一つのクラス関数 $|\ |: V \longrightarrow \mathrm{OR}$ を与える．

証明 **3.9.2**, **3.4.5** および **3.3.12** によって，すべての集合 u に対し $|u|$ が存在する．最小性から $|u|$ の一意性が従う．▨

注意 この定理は，AC と深く関係している．ZF だけでは，任意の集合 u にこのような順序数を一意的に対応させうることを証明できない．▨

定義 4.1.5 集合の濃度を**基数**という．基数全体はクラスをなし，これを Card で表わす：

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Card} &\equiv \exists u(|u| = x) \\ &\equiv x \in \mathrm{OR} \wedge \exists u[x \sim u \wedge \forall \alpha(\alpha < x \rightarrow \neg(\alpha \sim u))]^{\dagger}. \end{aligned}$$

したがって Card は自然な順序 $<$ をもち $\langle \mathrm{Card}, < \rangle$ は $\langle \mathrm{OR}, < \rangle$ の部分整列クラスである．▨

本章以降，基数はギリシャ小文字のうち主として $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \cdots$ などを用いて表わす．$\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \xi, \eta$ などは順序数を表わす．定義から直ちに

定理 4.1.6 $\kappa \in \mathrm{Card} \wedge \alpha < \kappa \rightarrow \alpha \not\sim \kappa^{\dagger\dagger}$. ▨

次に，基数についての基本的な性質を述べよう．

定理 4.1.7 1) $x \in \mathrm{Card} \leftrightarrow x = |x|$.

2) $x \sim y \leftrightarrow |x| = |y|$.

3) $\alpha \in \mathrm{OR} \rightarrow |\alpha| \leq \alpha$.

4) $x \subseteq y \rightarrow |x| \leq |y|$ (したがって **4.1.6** の結論は $|\alpha| < \kappa$ となる).

5) x から y への単射が存在する $\leftrightarrow |x| \leq |y|$.

証明 1) $x \in \mathrm{Card}$ なら $|u| = x$, $u \sim x$ なる集合 u が存在する．$\alpha < |u| \rightarrow \alpha \not\sim u$ であるから特に $|x| < |u| \rightarrow |x| \not\sim u$. しかし $|x| \sim x \sim u$ であるから $|x| \nless |u|$ でなければならない．したがって $|x| \geq |u| = x$. $|x| \leq x$ は自明であるから $x = |x|$ である．逆に，$x = |x|$ なら $x \in \mathrm{Card}$ は当然である．

† これは $x \in \mathrm{OR} \wedge \forall \alpha < x \neg(\alpha \sim x)$ とも表わされる．したがって Card 自体は AC なしに定義される．なお **4.6** を参照．

†† $\alpha \not\sim \kappa$ は $\neg(\alpha \sim \kappa)$ の略記．

2) $x\sim|x|$, $y\sim|y|$ であるから

$$x\sim y\leftrightarrow|x|\sim|y|\leftrightarrow|x|\leq|y|\wedge|y|\leq|x|\leftrightarrow|x|=|y|$$

(第2の同値性は $|x|$, $|y|$ の最小性による.)

3) $\alpha\in\mathrm{OR}$ とする. $\beta<|\alpha|\to\beta\not\sim\alpha$ であるから β として α をとることによって $\alpha\not<|\alpha|$. ゆえに $|\alpha|\leq\alpha$.

4) $x\subseteq y$ とする. $y\sim|y|$ であるから

$$z\subseteq|y|,\qquad x\sim z$$

なる集合 z が存在する. $z\subset\mathrm{OR}$ なるゆえ **3.4.5** によって

(1) $$\langle\alpha,\ \in\rangle\cong\langle z,\ \in\rangle$$

なる順序数 α が存在する. よって $x\sim\alpha$, したがって $|x|\leq\alpha$. (1)なる同型写像を f とすると **3.2.4** の証明と同様にして

$$\beta\in\alpha\to\beta\leq f`\beta\in z\subseteq|y|$$

よって $\alpha\subseteq|y|$, すなわち $\alpha\leq|y|$. したがって

$$|x|\leq|\alpha|\leq\alpha\leq|y|.$$

5) x から y への単射が存在すれば, $x\sim z$, $z\subseteq y$ なる集合 z がある. よって 2), 4) から $|x|=|z|\leq|y|$. 逆に $|x|\leq|y|$ なら, $|x|=|y|$ の場合 もちろん x から y への単射があり, また $|x|<|y|$ の場合 順序数 $|x|$ は順序数 $|y|$ の始切片であるから x は $|y|$ のある始切片と1対1対応する. ゆえに x から y への単射がある. ▒

問 1. κ が基数で $u\sim\kappa$ ならば, $|u|=\kappa$. ▒

補題 4.1.8 α, $\beta\in\mathrm{OR}$ で $\alpha+1\sim\beta+1$ ならば, $\alpha\sim\beta$ である.

証明 $\alpha+1\overset{f}{\sim}\beta+1$ とせよ. $f`\alpha=\delta$, $f`\delta'=\beta$ とする. $\delta=\beta$ なら $f\restriction\alpha$ は $\alpha\sim\beta$ を与える. もし $\delta\neq\beta$ なら $\delta'\neq\alpha$ である. $g:\alpha\longrightarrow\beta$ を

$$\begin{cases}g`\gamma=f`\gamma & if\quad \gamma<\alpha\wedge\gamma\neq\delta'\\ g`\delta'=\delta\end{cases}$$

によって定義すると, $\alpha\overset{g}{\sim}\beta$ である. ▒

補題 4.1.9 $\forall n\in\omega\forall\beta\in\mathrm{OR}[n\sim\beta\to n=\beta]$.

証明 n についての帰納法によって

(2) $$\forall\beta\in\mathrm{OR}[n\sim\beta\to n=\beta]$$

を証明する. $n=0$ のとき. $0\sim\beta$ は $\beta=0$ を意味する. $n\in\omega$ に対し帰納法の仮定として(2)を仮定し, $n+1$ を考える. $n+1\sim\gamma$ とせよ. $\gamma\geq\omega$ なら明白に $\gamma\sim\gamma+1$ であるから $n\sim\gamma$ となる. 帰納法の仮定より $n=\gamma$. しかし $n<\omega$, $\gamma\geq\omega$ だから不合理. ゆえに $\gamma<\omega$. よって $\gamma=\beta+1$ と表わされる ($\gamma\neq0$ は明

白). **4.1.8** によって $n\sim\beta$, したがって(2)から $n=\beta$. ゆえに $n+1=\beta+1=\gamma$. これで帰納法が完成し **4.1.9** が成り立つ. ▨

定理 4.1.10 $\omega\in\mathrm{Card}$.

証明 **4.1.7** によって $|\omega|\leq\omega$. もし $|\omega|<\omega$ ならば $|\omega|\in\omega$ であり, $|\omega|\sim\omega$ であるから **4.1.9** により $|\omega|=\omega$. 不合理. ゆえに $|\omega|\nless\omega$ でなければならない. したがって $|\omega|=\omega$. よって $\omega\in\mathrm{Card}$. ▨

定理 4.1.11 (カントルの定理) 任意の集合 u について

$$|u|<|\mathcal{P}(u)|.$$

証明は **1.7.4** のそれと殆ど同じである. $\overline{\overline{u}}$ の代わりに明確な基数 $|u|$ が用いられているだけの相違に過ぎない. ▨

この定理は第1章でも触れたように“いくらでも大きい基数の存在”を保証するもので極めて意義深い結果であるといえる.

定理 4.1.12 Card は固有クラスである.

証明 もし Card が集合ならば, $\bigcup\mathrm{Card}=v$ は集合である. 今までの結果を用いて

$$\kappa\in\mathrm{Card}\to\kappa\subseteq v\to\kappa=|\kappa|\leq|v|<|\mathcal{P}(v)|$$

が成り立つ. 特に κ として $|\mathcal{P}(v)|$ をとれば $|\mathcal{P}(v)|<|\mathcal{P}(v)|$. 不合理. ゆえに Card は固有クラスでなければならない. ▨

定理 4.1.13 $n\in\omega\to n\in\mathrm{Card}$.

証明 $n\in\omega$ とせよ. **4.1.9** により $\forall\beta\in\mathrm{OR}[n\sim\beta\to n=\beta]$ であるから $\beta<n\to n\nsim\beta$. よってもし $|n|<n$ なら $n\nsim|n|$. これは不合理であるから $|n|=n$ でなければならない. ゆえに $n\in\mathrm{Card}$. ▨

問 2. u が Card の部分集合ならば, u は Card において有界である, すなわち $\forall\kappa\in u[\kappa\leq\nu]$ なる基数 ν が存在する.

問 3. $\alpha,\beta\in\mathrm{OR}$ に対し, 1) $\alpha\leq\beta\to|\alpha|\leq|\beta|$, 2) $|\alpha|<|\beta|\to\alpha<\beta$. ▨

4.2 有限基数と無限基数

定義 4.2.1 ω の一つの要素と同等な集合を**有限集合**という. 有限集合全体のクラスを Fin で表わす:

$$x\in\mathrm{Fin}\equiv\mathrm{Fin}(x)\equiv\exists n\in\omega[n\sim x].$$

有限集合でない集合を**無限集合**といい, 無限集合全体のクラスを Infin で表わす:

$$\mathrm{Infin}=V-\mathrm{Fin}.$$ ▨

明白にωの各要素は有限集合である．そこで

定義 4.2.2　ωの要素を**有限基数**という．▒

よって有限基数は自然数そのものである．その把握の仕方によって有限順序数の概念になり，あるいは有限基数の概念になるわけである．

いま，$n\in\omega$ とし $n\sim x$ とすれば(**4.1.13** により) $|x|=n$ である．すなわちxは丁度n個の要素からなっている．よってxは

$$x=\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}\}\qquad \text{あるいは}\qquad x=\{b_1, b_2, \cdots, b_{n-1}\}$$

などと書かれる．

定理 4.2.3　$\omega\in\mathrm{Infin}$.

証明　$\omega\in\mathrm{Card}$ なるゆえ $n<\omega\to\omega\not\sim n$. よって $\omega\notin\mathrm{Fin}$. ▒

問 1.　$x, y\in\mathrm{Fin}$ ならば，1)　$z\subseteq x\to z\in\mathrm{Fin}$, 2)　$x\cup y,\ x\times y\in\mathrm{Fin}$.

問 2.　Fin は固有クラスである．▒

定義 4.2.4　有限基数でない基数を**無限基数**または**超限基数**といい，それら全体のクラスを Incard で表わす：

$$\mathrm{Incard}=\mathrm{Card}-\omega.\ ▒$$

定理 4.2.5　$\langle\mathrm{Incard}, <\rangle\cong\langle\mathrm{OR}, <\rangle$.

証明　ωは集合であり Card は固有クラスであるから，Incard も固有クラスである．Incard の始切片は，ある基数κに対し $\{\nu\in\mathrm{Incard}\,|\,\nu<\kappa\}=\{\nu\in\kappa\,|\,\nu\in\mathrm{Incard}\}$ と表わされるから集合である．$\mathrm{Incard}\subset\mathrm{OR}$ であるから **3.4.6** により定理が成立する．▒

問 3.　Infin は固有クラスである．▒

定義 4.2.6　$\langle\mathrm{OR}, <\rangle$ から $\langle\mathrm{Incard}, <\rangle$ への同型写像（クラス関数である）を $\aleph$ で表わす：

$$\aleph : \mathrm{OR}\longrightarrow\mathrm{Incard}\qquad (\text{1-1, onto, 順序保存})\ ▒$$

補題 4.2.7　$\aleph`0=\omega$, すなわちωは最小の無限基数である．

証明　Incard は $<$ に関し整列されているから，ωが Incard の極小元であることをいえばよい．しかしそれは明白である．▒

定義 4.2.8　$\alpha\in\mathrm{OR}$ に対し

$$\aleph_\alpha=\aleph`\alpha$$

とおく．$\aleph_\alpha$ の代わりに ω_α とかくこともある．これについては **4.6** を参照．$\aleph_\alpha$ 自体は AC なしに定義されている．▒

例えば，$\aleph_1$ はωより大きい最小の基数である．よって $\alpha<\aleph_1\to|\alpha|\leq\omega$. ゆえに $\aleph_1$ は**非可算な最小の順序数**として特徴づけられる．

さて，上のことから無限基数は

（1）　$\omega=\aleph_0<\aleph_1<\aleph_2<\cdots<\aleph_\omega<\aleph_{\omega+1}<\cdots$

のように整列されていることがわかる．そして $\aleph_{\alpha+\omega}$ は $\aleph_{\alpha+i}$ $(i\in\omega)$ たちよりも大きい最小の基数である．添字ωの代わりに他の極限数をとっても同様なことがいえる．

問 4.　$\alpha,\ \beta\in \mathrm{OR}$, $\aleph_\alpha<\beta<\aleph_{\alpha+1}$ ならば，$|\beta|=\aleph_\alpha$ である．▨

定義 4.2.9　基数 $|\mathcal{P}(\aleph_\alpha)|$ を $2^{\aleph_\alpha}$ で表わす．特に $|\mathcal{P}(\omega)|=2^{\aleph_0}$ である†．▨

$2^{\aleph_0}$ は基数であるから(1)なる系列のどこかにおちるはずである．**4.1.11** によれば

（2）　$\aleph_0<2^{\aleph_0}$

であるから，結局 $\aleph_1\leq 2^{\aleph_0}$ である．カントルは

（3）　$2^{\aleph_0}\dot{=}\aleph_1$

であろうと予想した．これをカントルの**連続体仮説**といい，CH で表わす．$\mathcal{P}(\omega)$ は実数全体の集合 $\mathcal{R}$ と同等である(演習問題 I，13)から，$2^{\aleph_0}$ は実数連続体の濃度に等しい．よって(3)は連続体の濃度が何かを予想したものであり，それゆえに連続体予想ともいわれる．カントルは $\mathcal{R}$ の濃度が，系列(1)の中の $\aleph_0$ の次の基数に等しいと考えたわけである．関連して任意の順序数αに対し

（4）　$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$

なる命題が考えられる．(4)をαにおける一般連続体仮説といい，GCH(α) で表わす．

（5）　$\forall\alpha\,\mathrm{GCH}(\alpha)$　　すなわち　　$\forall\alpha(2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1})$

なる命題を**一般連続体仮説**といい，GCH で表わす．もし(5)が ZFC で証明されるならば，基数論は大変整然としたものになるであろう．のみならず，その結果として多くの興味ある結果が生ずるのである．カントルが予想(3)を発表(1878年)して以来，これを証明しようとして多数の数学者がこれにたずさわった．(3)の帰結として奇妙な定理が証明された††ので，(3)は疑わしいと考えていた人も少なくはなかったようである．今日では(3)は現在の集合論の公理系(ZFC など)からは肯定も否定もできないことが知られている．本書では後章においてこのことに触れる．

† 集合uのべき集合 $\mathcal{P}(u)$ を 2^u で表わすことがあるが，$2^{\aleph_0}$ は単なる $\mathcal{P}(\aleph_0)$ ではなくて，その濃度を表わすことに注意すべきである．

†† 例えば，“ユークリッド平面は可算個の曲線の和として表わされる”ことが導かれる．(ここで曲線とは $f\colon \mathcal{R}\longrightarrow\mathcal{R}$ なる関数fのグラフのことである．) この結果はわれわれの平面に対する直観とすぐには合致するものでない．

4.3 可算集合と非可算集合

第1章で可算集合のことに言及したが，厳密な取り扱いはなされないで後章にゆだねられていた．本節では，選択公理を用いて記述を完全にする．

定義 4.3.1 ω と同等な集合を**可算集合**という．またかかる集合は，**可算**であるという．有限でもなく可算でもない集合(すなわち高々可算でない集合)を**非可算集合**という．▨

第1章で述べた定理を再掲しよう．

定理 4.3.2 無限集合は可算部分集合を含む.

証明 uを無限集合とする．よって

(1) $$\forall n \in \omega[n \not\sim u].$$

(ZFC では)すべての集合は整列可能であり(**3.9.2**)したがって **3.4.5** により

$$\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle u, r \rangle$$

なる順序数αが存在する．ここにrはuを整列する全順序である．この同型対応をfとする．明白に

(2) $$u \sim \alpha.$$

(1)によって $\alpha \geq \omega$ でなければならない．fは 1–1 であるから $f``\omega \sim \omega$. よって $f``\omega$ はuの可算部分集合である．▨

この定理は，ZF では証明できない(すなわち選択公理なしには証明できない)ことが知られている.

定理 4.3.3 可算集合の部分集合は高々可算集合である．▨

証明は第1章のそれと同様である.

定理 4.3.4 無限集合はそのある真部分集合と同等である．▨

これも第1章の証明と同様であるが，**4.3.2** にもとづいているゆえ，その証明は ZF では通用しない．事実，この定理も ZF では証明できないことが知られている.

定理 4.3.5 可集合たちの可算個の和は可算集合である.

解説と証明 第1章で言及したように，この定理の証明には選択公理が必要である．なぜそうかということは，この定理を集合論言語 $\mathcal{L}$ の論理式で表示してみるとよくわかる．定理は

(3) $$\forall u[\omega \sim u \wedge \forall x(x \in u \to \omega \sim x) \to \bigcup u \sim \omega]$$

である．$\omega \sim x$ を分析してみるとそれは $\exists g[g : \omega \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} x]$ であるから (3) の

[　] 内の前提は

（4）　$\exists f[\omega \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} u] \wedge \forall x[x \in u \to \exists g(g: \omega \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} x)]$

である．(4)の第1式をみたす関数 f を一つとる．よって $u=\{f‘0, f‘1, f‘2, \cdots\}$ と表わせる．しかし第2式で各 x に対し g は一般に無数に存在しうるから，x の全要素を ω 型に並べる方法 g が確定しない．そこで選択公理にたよる必要が生じる．選択公理によって集合

$$v=\{\{g: \omega \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} x\} \mid x \in u\}$$

に対する選択関数 h をとる：$\forall y \in v[h‘y \in y]$．そのとき u の各要素 x の要素たちは次のように‘並べられる’．

$$x=\{h_x‘0, h_x‘1, h_x‘2, \cdots\}.$$

ここで値 $h‘\{g: \omega \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} x\}$ は $\omega \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} x$ なる関数であり，それを h_x と略記した．したがって $(h‘\{g: \omega \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} x\})‘i=h_x‘i$ $(i \in \omega)$ である．$x \in u$ なる x はある $n \in \omega$ に対し上の f を用いて $f‘n$ と表わされるから，h_x を改めて h_n とかくと u の要素たちは

$$\{h_n‘0, h_n‘1, h_n‘2, \cdots\} \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

と表現することができる．これから後の証明は，第1章における対応する証明を続ければよい．そこの a_i^n がここの $h_n‘i$ であるだけの相違である．かくして ω から $\bigcup u$ の上への 1-1 対応を構成することができる．▨

次の定理は，数学一般において可算集合を取り扱う際に基本的な働きをするある性質を述べている．

定理 4.3.6　u が可算集合ならば，u の有限部分集合たち全体の集合(すなわち $\mathrm{Fin} \cap \mathscr{P}(u)$)は可算集合である．

証明　$u \sim \omega$ であるから $\mathrm{Fin} \cap \mathscr{P}(\omega)$ が可算集合であることを示せばよい．$n \in \omega$ ならば

（5）　$n=\{0, 1, 2, \cdots, n-1\}$　（ただし $n>0$）

であった．次の関係は容易にわかるであろう：

（6）　$\mathrm{Fin} \cap \mathscr{P}(\omega)=\bigcup\{\mathscr{P}(n) \mid n \in \omega\}$
$$=\mathscr{P}(0) \cup \bigcup\{\mathscr{P}(n)-\mathscr{P}(n-1) \mid n \in \omega \wedge n>0\}.$$

$\mathscr{P}(0)$, $\mathscr{P}(n)-\mathscr{P}(n-1)$ たちは互いに素である，すなわちどの2集合も共通部分をもたない．明らかに

$$|\mathscr{P}(n)-\mathscr{P}(n-1)|=2^{n-1}.$$

$\mathscr{P}(0)$ のただ一つの要素に0を，$\mathscr{P}(n)-\mathscr{P}(n-1)$ の 2^{n-1} 個の要素に 2^{n-1},

$2^{n-1}+1, \cdots, 2^n-1$ を対応させることによって

$$\mathrm{Fin} \cap \mathcal{P}(\omega) \sim \omega$$

なることがわかる†. ▨

さて前節で示したように $|\mathcal{P}(\omega)| > \aleph_0$ であるから, $\mathcal{P}(\omega)$ は非可算集合である. したがって

$$\mathcal{P}(\omega),\ \mathcal{P}^2(\omega),\ \mathcal{P}^3(\omega),\ \cdots$$

はすべて非可算集合で, その濃度は次第に大きくなっている:

$$|\mathcal{P}(\omega)| < |\mathcal{P}^2(\omega)| < |\mathcal{P}^3(\omega)| < \cdots$$

ただし $\mathcal{P}^2(\omega) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$, $\mathcal{P}^{n+1}(\omega) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^n(\omega))$ である.

定理 4.3.7 (カントル・ベルンシュタインの定理)

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall u \forall v [\exists f(f: u \xrightarrow{1\text{-}1} v) \wedge \exists g(g: v \xrightarrow{1\text{-}1} u) \to u \sim v].$$

証明は 第1章 **1.5.4** のそれと同じである. 選択公理が使用されていないことに注意すればよい. ▨

定理 4.3.8 実数全体の集合 $\mathcal{R}$ は非可算集合である††.

証明 $I = \{x \in \mathcal{R} \mid 0 < x < 1\}$ とおく††. 区間 $\left[\dfrac{1}{n+2}, \dfrac{1}{n+1}\right)$ と $[-n, -n+1)$, 区間 $\left[\dfrac{n}{n+1}, \dfrac{n+1}{n+2}\right)$ と $[n-1, n)$ とはそれぞれ同等である(ただし $n \in \omega$). これらにより $I \sim \mathcal{R}$ なることがわかる. I に属する各実数 r を2進小数展開して

$$r = 0.r_0 r_1 r_2 \cdots r_n \cdots \tag{7}$$

とする. 一意性のため, あるところから先すべてが0という表現を許さないとする. (7)に対し

$$u_r = \{n \in \omega \mid r_n = 1\}$$

とすれば, $u_r \subseteq \omega$ であって, $r \neq s \to u_r \neq u_s$. しかも $u_r \notin \mathrm{Fin} \cup \{\omega\}$. よって I から $\mathcal{P}(\omega) - (\mathrm{Fin} \cup \{\omega\})$ への全単射が存在することがわかる. 前の定理により $(\mathrm{Fin} \cap \mathcal{P}(\omega)) \cup \{\omega\}$ は可算集合であるから, I は非可算集合でなければならない. なぜなら2つの可算集合の和は可算集合であるからである. ▨

注意 われわれは未だ, 実数や有理数を ZFC で定義してなかった. これらを ZFC で取り扱うには多少のスペースを必要とする. ここではそれを省略し, 既知の直観的な

---

† ここでわれわれは, 自然数に関するよく知られた性質を使用した. それらは本書では十分には論じられていないので, それについては他書を参照されたい.

†† 集合であることが知られているものには, 小文字を用いる方が首尾一貫しているわけであるが, 特別な集合については慣習的な記号あるいは大文字を用いることが多い. 以下では文字の大小に余りこだわらないこととする.

実数概念に依存することにする．数理論理学ではルーズな意味で，$\mathscr{P}(\omega)$ の要素や ${}^{\omega}\omega=\{f\,|\,f:\omega\longrightarrow\omega\}$ の要素を実数と呼ぶことが多い．本書においても，以下ではこの慣習に従うであろう．▒

問 1. $\mathscr{P}(\omega)\sim I$ を証明せよ．したがって $\mathscr{P}(\omega)\sim\mathscr{R}$ である．

問 2. 集合 u に対し $[u]^{\omega}=\{x\subseteq u\,|\,|x|=\aleph_0\}$ とする．$[\omega]^{\omega}\sim\mathscr{P}(\omega)$ であることを証明せよ．

問 3. ${}^{\omega}\omega\sim\mathscr{P}(\omega)$ であることを証明せよ．[${}^{\omega}\omega=\{f\,|\,f:\omega\longrightarrow\omega\}$ は**ベール零空間**と呼ばれる．それは‘距離’

$$\mathrm{d}(f,g)=\frac{1}{\min\{n\in\omega\,|\,f`n\neq g`n\}+1}\qquad(f,g\in{}^{\omega}\omega,\ f\neq g)$$

に関し，零次元完備距離空間をなす．さらに $\mathscr{N}$ を 0 と 1 の間の無理数全体の集合とすれば，$f\in{}^{\omega}\omega$ と無理数(の**正則連分数展開**)

$$\frac{1}{|\,(f`0)+1}\Big|+\frac{1}{|\,(f`1)+1}\Big|+\cdots+\frac{1}{|\,(f`n)+1}\Big|+\cdots$$

を対応させることによって，${}^{\omega}\omega\sim\mathscr{N}$ となる．ここに $n_i\in\omega-\{0\}$ $(i=1,2,\cdots)$ に対し

$$\frac{1}{|\,n_1}\Big|+\frac{1}{|\,n_2}\Big|+\frac{1}{|\,n_3}\Big|+\cdots=\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\ddots}}}$$

である.] ▒

4.4 基数の算術

基数は自然数の一つの拡張であるから，それらの間に加法，乗法のような演算が定義されることが望ましい．もちろん拡張された算法はそれを自然数に制限したとき，自然数の間の既知の算法になっていなければならない．

定義 4.4.1 κ,ν を基数とする．$|u|=\kappa$, $|v|=\nu$ なる集合 u,v をとる．κ,ν の**和**，**積**，**べき(巾)**はそれぞれ次のように定義される：

（i） u,v が $u\cap v=\phi$ をみたすように選ばれたとき，$\kappa+\nu=|u\cup v|$.

（ii） $\kappa\cdot\nu=|u\times v|$,

（iii） $\kappa^{\nu}=|{}^{v}u|$,　ここに ${}^{v}u=\{f\,|\,f:v\longrightarrow u\}$ である．

((ii), (iii) では $u\cap v=\phi$ なる条件が要請されないので，u,v としてそれぞれ κ,ν 自身をとってよい.) ▒

これらが自然数の間の和，積，べき乗の自然な拡張になっていることは明白であろう．例えば $n,m\in\omega$, $n,m>0$ に対し n^m は n 個のものから重複を許して m 個とる順列の数であり，それは m-元集合上で定義され，n-元集合の要素を値としてとる関数たちの個数に等しい．

定理 4.4.2 4.4.1 における $\kappa+\nu$, $\kappa\cdot\nu$, κ^{ν} の定義は u, v の選び方に依存しない，すなわち $u_1\sim u_2\sim\kappa$, $v_1\sim v_2\sim\nu$ ならば

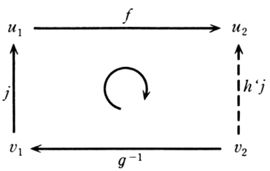
(i) $u_i\cap v_i=\phi$ $(i=1, 2)$ なるとき $u_1\cup v_1\sim u_2\cup v_2$,

(ii) $u_1\times v_1\sim u_2\times v_2$, (iii) ${}^{v_1}u_1\sim{}^{v_2}u_2$.

証明 (i), (ii)の証明は容易であるから，(iii)を証明する．

$$f: u_1 \longrightarrow u_2, \qquad g: v_1 \longrightarrow v_2$$

なる全単射 f, g をとる．これらを用いて全単射 $h: {}^{v_1}u_1 \longrightarrow {}^{v_2}u_2$ をつくるのである．各 $j: v_1\longrightarrow u_1$ に対し $h`j$ を次のダイヤグラムが可換であるように選ぶ：



すなわち $h`j \underset{\mathrm{def}}{=} f\circ j\circ g^{-1}$.

$h`j\in{}^{v_2}u_2$ であり $h$ は所要のものである．なぜならまず，$h$ が単射なること：$j\neq j'$ なら $j`x\neq j'`x$ なる $x\in v_1$ があるから，f の 1-1 性から

$$(h`j)`(g`x)=f\circ j\circ g^{-1}\circ g`x=f`(j`x)\neq f`(j'`x)=(h`j')`(g`x).$$

ゆえに $h`j\neq h`j'$. つぎに，全射なること：任意の $k\in{}^{v_2}u_2$ をとると，

$$j=f^{-1}\circ k\circ g$$

なる j をつくれば $j\in{}^{v_1}u_1$ であって

$$h`j=f\circ(f^{-1}\circ k\circ g)\circ g^{-1}=k$$

である．ゆえに h は全射である．これで定理の(iii)が証明された．▨

そこで基数の和，積，べき乗のもつ基本性質を述べよう．

定理 4.4.3 κ, λ, ν は基数を表わすとする．そのとき

(i) $\kappa+\lambda=\lambda+\kappa$, $\kappa\cdot\lambda=\lambda\cdot\kappa$.

(ii) $(\kappa+\lambda)+\nu=\kappa+(\lambda+\nu)$, $(\kappa\cdot\lambda)\cdot\nu=\kappa\cdot(\lambda\cdot\nu)$.

(iii) $\kappa\cdot(\lambda+\nu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\nu$.

(iv) $\kappa^{\lambda+\nu}=\kappa^{\lambda}\cdot\kappa^{\nu}$.

(v) $(\kappa\cdot\lambda)^{\nu}=\kappa^{\nu}\cdot\lambda^{\nu}$.

(vi) $(\kappa^{\lambda})^{\nu}=\kappa^{\lambda\cdot\nu}$.

証明 ここでは(iv)と(vi)を証明し，残りは読者の演習にゆだねる．

(iv) $\kappa\sim u$, $\lambda\sim v$, $\nu\sim w$, $v\cap w=\phi$ なる集合 u, v, w をとる．

$$^{v\cup w}u \sim {}^{v}u \times {}^{w}u$$

を示せばよろしい．$g: v \longrightarrow u$, $h: w \longrightarrow u$ なる g, h に対し $j`\langle g, h\rangle$: $v\cap w \longrightarrow u$ を

$$(j`\langle g, h\rangle)`x = \begin{cases} g`x & \textit{if} \quad x \in v \\ h`x & \textit{if} \quad x \in w \end{cases}$$

によって定義する．そのとき j は $j: {}^{v}u \times {}^{w}u \longrightarrow {}^{v\cup w}u$ なる全単射である．以下その証明．まず j が単射であること：$\langle g, h\rangle \neq \langle g', h'\rangle$ とし，例えば $g \neq g'$ と仮定しよう．よって $g`x \neq g'`x$ なる $x \in v$ が存在する．このとき，$(j`\langle g, h\rangle)`x = g`x \neq g'`x = (j`\langle g', h'\rangle)`x$ であるから $j`\langle g, h\rangle \neq j`\langle g', h'\rangle$ であることがわかる．次に j が全射であること：任意に $f: v\cup w \longrightarrow u$ なる f をとる．$g = f\upharpoonright v$, $h = f\upharpoonright w$ とすれば明白に $j`\langle g, h\rangle = f$ である．よって j は全単射である．

(vi) $\kappa \sim u$, $\lambda \sim v$, $\nu \sim w$ なる集合 u, v, w をとる．

$$^{w}({}^{v}u) \sim {}^{v\times w}u$$

を証明したい．各 $f \in {}^{w}({}^{v}u)$ に対し $j`f: v\times w \longrightarrow u$ を次のように定義する：任意に $x \in v$, $y \in w$ をとる．$f`y: v \longrightarrow u$ に注意して

$$(j`f)`\langle x, y\rangle = (f`y)`x.$$

このとき $j: {}^{w}({}^{v}u) \longrightarrow {}^{v\times w}u$ が全単射である．なんとなれば，まず単射性：$f, g \in {}^{w}({}^{v}u)$, $f \neq g$ としよう．$f`y \neq g`y$ なる $y \in w$ がある．したがって $(f`y)`x \neq (g`y)`x$ なる $x \in v$ がある．ゆえに $(j`f)\langle x, y\rangle \neq (j`g)`\langle x, y\rangle$，よって $j`f \neq j`g$．j が全射であること：任意に $h \in {}^{v\times w}u$ をとる．$f \in {}^{w}({}^{v}u)$ を $x \in v$, $y \in w$ に対し

$$(f`x)`y = h`\langle x, y\rangle$$

によって定義するとき，この f に対し $j`f = h$ なることがわかる．よって j は全単射である．▨

問 1. **4.4.3** の(i)，(ii)，(iii)，(v)を証明せよ．▨

すでに **4.2.9** で基数 $2^{\aleph_\alpha}$ を定義した．2 は基数であるから **4.4.1** によりべき $2^{\aleph_\alpha}$ が定義される．記号法が整合的であるためには両者が一致しなければならない．実際 2 つの定義による $2^{\aleph_\alpha}$ は一致する．それは

$$\mathcal{P}(\kappa) \sim {}^{\kappa}2$$

なることから直ちに従うことである．

さて，次に重要な定理を述べよう．

定理 4.4.4 κ が無限基数ならば $\kappa\cdot\kappa = \kappa$ が成り立つ．▨

これを証明するために，準備として順序数についての一性質を証明しなけれ

ばならない．

定理 4.4.5　αを順序数とする．$\alpha \geq \omega$ ならば $\alpha \times \alpha \sim \alpha$ である．

証明　定理が成立しないとして，α を $\alpha \geq \omega \wedge \alpha \times \alpha \nsim \alpha$ なる最小の順序数とする．カントルの**対関数**

$$\pi(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m \qquad (m, n \in \omega)$$

が $\omega \times \omega$ と ω の間の全単射を与えることは既知である．よって $\alpha > \omega$ でなければならない．$\alpha \times \alpha \nsim \alpha$ と $|\alpha| \leq |\alpha \times \alpha|$ から $|\alpha| < |\alpha \times \alpha|$ でなければならない．さらに α は基数でなければならない．なぜなら，もし α が基数でないとすれば，$\omega \leq \beta < \alpha$, $\beta \sim \alpha$ なる順序数βが存在する．αの最小性から $\beta \times \beta \sim \beta$. よって $\alpha \times \alpha \sim \beta \times \beta \sim \beta \sim \alpha$ となり不合理．そこで

$$\langle \gamma, \in \rangle \cong \langle \alpha \times \alpha, \in * \in \rangle$$

なる一意に定まる順序数γを考える．$|\alpha| < |\alpha \times \alpha| = |\gamma|$ より $\alpha < \gamma$. よって $\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \{\langle \xi', \eta' \rangle | \langle \xi', \eta' \rangle <_{Le} \langle \xi, \eta \rangle\}, <_{Le} \rangle$ なる $\langle \xi, \eta \rangle \in \alpha \times \alpha$ が存在する．ここに $<_{Le}$ は $\alpha \times \alpha$ 上の辞書式順序である．この同型対応を f とする．$\delta = (\xi \cup \eta) + 1$ とおけば，$\delta < \alpha$ であるがfによりαは$\delta \times \delta$の中へ埋蔵される．αの選び方から $\delta \times \delta \sim \delta$. したがって $|\alpha| \leq \delta$, よって $\alpha \sim \delta$. これはαが基数であることに反する．これで不合理に達したから，定理が成立する．▨

定理 4.4.4 の証明　κを無限基数とする．κはω以上の順序数であるから，**4.4.5** により $\kappa \times \kappa \sim \kappa$. 定義により $|\kappa \times \kappa| = \kappa \cdot \kappa$ であるから $\kappa \cdot \kappa = \kappa$. ▨

定理 4.4.6　$\kappa, \lambda, \mu, \nu$ を基数とする．

(i)　$\kappa \leq \lambda \rightarrow \kappa + \nu \leq \lambda + \nu$.

(ii)　$\kappa \leq \lambda,\ \mu \leq \nu \rightarrow \kappa + \mu \leq \lambda + \nu$.

(iii)　$\kappa \leq \lambda \rightarrow \kappa \cdot \nu \leq \lambda \cdot \nu$.

(iv)　$\kappa \leq \lambda,\ \mu \leq \nu \rightarrow \kappa \cdot \mu \leq \lambda \cdot \nu$.

(v)　$\kappa \leq \lambda \rightarrow \kappa^{\nu} \leq \lambda^{\nu},\ \mu^{\kappa} \leq \mu^{\lambda}$.

(vi)　$\kappa \leq \lambda,\ \mu \leq \nu \rightarrow \kappa^{\mu} \leq \lambda^{\nu}$.

証明　(ii), (iv), (vi)はそれぞれ(i), (iii), (v)からの直接的帰結である．ここでは(i)を証明しよう．$\kappa \leq \lambda$ とし $\langle u, r \rangle \cong \langle \kappa, \in \rangle$, $\langle v, s \rangle \cong \langle \lambda, \in \rangle$, $\langle w, t \rangle \cong \langle \nu, \in \rangle$, $u \cap w = \phi \wedge v \cap w = \phi$ とする．$\kappa = \lambda$ なら明白であるから $\kappa < \lambda$ とする．よって $\langle u, r \rangle \cong \langle \mathrm{Seg}_s(a), s \rangle$ なる $a \in v$ が存在する．そのとき

$$\langle u \cup w, r \oplus t \rangle \cong \langle \mathrm{Seg}_s(a) \cup w, (s | \mathrm{Seg}_s(a)) \oplus t \rangle$$

$$\mathrm{Seg}_s(a) \cup w \subset v \cup w, \qquad (s | \mathrm{Seg}_s(a)) \oplus t \subset s \oplus t$$

であるから，$\kappa + \nu \leq \lambda + \nu$. (iii)と(v)についても同様である．読者の演習にゆ

だねる. ▨

問 2. 上の(iii), (v)を証明せよ. ▨

この定理で, ≦ を < によっておきかえた命題は, 必ずしも成立しない. 例えば

$$\kappa<\lambda \to \kappa^{\nu}<\lambda^{\nu}$$

に対する反例として: $2<2^{\aleph_0}$ であるが $2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0 2}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}$. ここで $\aleph_0{}^2=\aleph_0$ を用いた.

上の諸結果から次の興味ある事実が導かれる:

定理 4.4.7 κ, ν は 0 でない基数で, 少なくとも一方は無限基数とする. そのとき

$$\kappa+\nu=\kappa\cdot\nu=\max\{\kappa, \nu\}.$$

証明 $0<\nu\leq\kappa$ と仮定してよい. したがって仮定により κ は無限基数である. そのとき **4.4.4**, **4.4.6** によって

$$\kappa\leq\kappa+\nu\leq\kappa+\kappa=\kappa\cdot 2\leq\kappa\cdot\kappa=\kappa$$

$$\kappa\leq\kappa\cdot\nu\leq\kappa\cdot\kappa=\kappa.$$

これより $\kappa+\nu=\kappa\cdot\nu=\kappa.$ ▨

問 3. $n\in\omega$ $(n>0)$ ならば, 任意の基数 κ に対し

$$\kappa^n=\overbrace{\kappa\cdot\kappa\cdots\kappa}^{n}.$$ ▨

定理 4.4.8 $n\in\omega$, $n>0$ で, κ が無限基数ならば

$$\kappa^n=\kappa.$$

証明 問3により $\kappa^n=\kappa\cdot\kappa\cdots\kappa$ (n 個). 後者は **4.4.4** を繰り返し適用することによって, κ に等しいことがわかる. ▨

問 4. $\kappa\geq\aleph_0$ ならば $\kappa+1=\kappa$. ここに + は基数和を表わす. 順序数和としての $\kappa+1$ については $|\kappa+1|=\kappa$ となる. ▨

さて I を任意の集合とする.

(1) $$f: I \longrightarrow \mathrm{Card}$$

なるとき(集合の超限列(**3.5**)の場合と同様に) $f`i$ の代わりに κ_i あるいは ν_i のような記法を用い, $f``I$ を

$$\{\kappa_i\in\mathrm{Card}\,|\,i\in I\} \qquad \text{あるいは} \qquad \{\kappa_i\,|\,i\in I\}\subset\mathrm{Card}$$

などと表示する. あるいはより簡単に "κ_i $(i\in I)$ は基数" と表わすこともある. I を**添数集合**という. 上の(1)で $f: I\longrightarrow V$ の場合もこれに準じた記法を用いる.

定義 4.4.9　I を添数集合とし $\{\kappa_i|i\in I\}\subset\mathrm{Card}$ とする．各 $i\in I$ に対し $u_i\sim\kappa_i$，$i\neq j\to u_i\cap u_j=\phi$ なる $\{u_i|i\in I\}$ を選ぶ．このとき κ_i たちの基数和，基数積をそれぞれ

$$\sum_{i\in I}\kappa_i=|\bigcup\{u_i|i\in I\}|,\qquad \prod_{i\in I}\kappa_i=|\mathop{\times}_{i\in I}u_i|$$

と定義する．（ただし後者では条件 $i\neq j\to u_i\cap u_j=\phi$ は不要．）ここで

$$\mathop{\times}_{i\in I}u_i=\{f|f:I\longrightarrow\bigcup\{u_i|i\in I\}\wedge\forall i\in I[f`i\in u_i]\}$$

である．▨

注意　置換公理によって $\{u_i|i\in I\}$ は集合である．▨

容易にわかるように上の定義は u_i の選び方に依存しない．

定理 4.4.10　ν, λ, κ_i $(i\in I)$ は基数とする．このとき

(i)　$\lambda\cdot\sum_{i\in I}\kappa_i=\sum_{i\in I}(\lambda\cdot\kappa_i)$.

(ii)　$\forall i\in I(\kappa_i=\nu)\to\sum_{i\in I}\kappa_i=|I|\cdot\nu$.

(iii)　$|\bigcup_{i\in I}u_i|\leq\sum_{i\in I}|u_i|$†.

(iv)　$\forall i\in I(\kappa_i=\nu)\to\prod_{i\in I}\kappa_i=\nu^{|I|}$.

(v)　$\nu^\mu=\prod_{i\in I}\nu^{\kappa_i}$,　　ここに $\mu=\sum_{i\in I}\kappa_i$.

(vi)　$(\prod_{i\in I}\kappa_i)^\lambda=\prod_{i\in I}\kappa_i{}^\lambda$.

証明　演習問題 IV の 7．▨

次の定理は，基数についての基本的な不等式関係である．

定理 4.4.11　κ_i, λ_i $(i\in I)$ が基数で，$\kappa_i<\lambda_i$ $(i\in I)$ とする．そのとき

$$\sum_{i\in I}\kappa_i<\prod_{i\in I}\lambda_i$$

証明　各 $i\in I$ に対し $|u_i|=\kappa_i$ なる集合 u_i を $u_i\cap u_j=\phi$ $(i\neq j)$ となるように選ぶ．$f:\bigcup_{i\in I}u_i\longrightarrow\mathop{\times}_{i\in I}\lambda_i$ なる f が全射でないことを証明すればよい．$\kappa_i<\lambda_i$ であるから，各 $i\in I$ に対し

$$\lambda_i-\{(f`a)`i|a\in u_i\}\neq\phi$$

である．よって，選択公理によって $g`i\in\lambda_i-\{(f`a)`i|a\in u_i\}$ なる関数 $g\in\mathop{\times}_{i\in I}\lambda_i$ が存在する．明らかに $g\notin\mathrm{Rng}(f)$ である．ゆえに f は全射でない．▨

---

† $\bigcup_{i\in I}u_i$ は $\cup\{u_i|i\in I\}$ の略記である．

系 4.4.12 基数の可算列 $\{\kappa_i|i\in\omega\}$ が与えられていて $\forall i\in\omega(0<\kappa_i<\kappa_{i+1})$ が成り立っていれば，次の不等式が成立する：

$$\sum_{i\in\omega}\kappa_i<\prod_{i\in\omega}\kappa_i.$$

証明 仮定と **4.4.11** とによって

$$\sum_{i\in\omega}\kappa_i<\prod_{i\in\omega}\kappa_{i+1}\leq\kappa_0\prod_{i\in\omega}\kappa_{i+1}=\prod_{i\in\omega}\kappa_i.$$ ▨

問 5. 上の証明中の最後の等号が成立することを確かめよ．▨

系 4.4.13 αを任意の順序数とするとき

(i) $\aleph_{\alpha+\omega}<(\aleph_{\alpha+\omega})^{\aleph_0}$ (ii) $2^{\aleph_0}\neq\aleph_{\alpha+\omega}$.

証明 (i) **4.4.10** (iv)と **4.4.12** を用いて

$$\aleph_{\alpha+\omega}=\sum_{i\in\omega}\aleph_{\alpha+i}<\prod_{i\in\omega}\aleph_{\alpha+i}<\prod_{i\in\omega}\Big(\sum_{j\in\omega}\aleph_{\alpha+j}\Big)=\Big(\sum_{j\in\omega}\aleph_{\alpha+j}\Big)^{\aleph_0}=(\aleph_{\alpha+\omega})^{\aleph_0}.$$

ここで最初の等式を証明しなければならないが，これはすぐ後で **4.4.15** として述べることにする．

(ii) もし $2^{\aleph_0}=\aleph_{\alpha+\omega}$ であるとすれば，

$$(\aleph_{\alpha+\omega})^{\aleph_0}=(2^{\aleph_0})^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph_{\alpha+\omega}$$

となって(i)に反する．ゆえに $2^{\aleph_0}\neq\aleph_{\alpha+\omega}$. ▨

4.4.11〜4.4.13 は**ケーニヒの定理**といわれる．特に $2^{\aleph_0}\neq\aleph_{\alpha+\omega}$ は，連続体の濃度を規制するものとして重要な結果である．

補題 4.4.14 任意の順序数αについて，差集合 $\aleph_{\alpha+1}-\aleph_\alpha$ は $\aleph_{\alpha+1}$ と同等である：$|\aleph_{\alpha+1}-\aleph_\alpha|=\aleph_{\alpha+1}$.

証明 $|\aleph_{\alpha+1}-\aleph_\alpha|=\aleph_\beta$ とする．$(\aleph_{\alpha+1}-\aleph_\alpha)\cap\aleph_\alpha=\phi$ であるから

$$\aleph_{\alpha+1}=|\aleph_{\alpha+1}|=|(\aleph_{\alpha+1}-\aleph_\alpha)\cup\aleph_\alpha|=\aleph_\beta+\aleph_\alpha.$$

4.4.7 により右辺は $\aleph_\alpha$ か $\aleph_\beta$ に等しい．しかも明白に右辺は $\aleph_\alpha$ にはなり得ない．よって $\aleph_{\alpha+1}=\aleph_\beta$ が成り立つ．すなわち $|\aleph_{\alpha+1}-\aleph_\alpha|=\aleph_{\alpha+1}$. ▨

補題 4.4.15 任意の順序数αについて

$$\sum_{i\in\omega}\aleph_{\alpha+i}=\aleph_{\alpha+\omega}.$$

証明 各 $i\in\omega$ に対し $u_i\sim\aleph_{\alpha+i}$ なる集合 u_i を $u_i\cap u_j=\phi$ $(i\neq j)$ となるように選ぶ．そのとき

$$\sum_{i\in\omega}\aleph_{\alpha+i}=|\bigcup_{i\in\omega}u_i|.$$

前補題と選択公理とにより，各 $i\in\omega$ に対し

$$g_i:\aleph_{\alpha+i+1}-\aleph_{\alpha+i}\longrightarrow\aleph_{\alpha+i+1}\quad（全単射）$$

なる g_i が選べるから，

$$h_i: u_i \cup u_{i+1} \longrightarrow \aleph_{\alpha+i+1} \qquad (\text{全単射})$$

$$h_i``u_i = \aleph_{\alpha+i}, \qquad h_i``u_{i+1} = \aleph_{\alpha+i+1} - \aleph_{\alpha+i}$$

なる h_i が存在する．そこで帰納法により関数 f_i を次のように定義する：

$$f_0: u_0 \longrightarrow \aleph_\alpha$$

は $|u_0| = \aleph_\alpha$ を与える全単射とする．いま，f_0, f_1, $\cdots$, f_i が

（2） $$f_i: \bigcup_{k=0}^{i} u_k \longrightarrow \aleph_{\alpha+i} \quad (\text{全単射}), \qquad f_i \restriction \bigcup_{k=0}^{i-1} u_k = f_{i-1}$$

をみたすように定義されたとする(帰納法の仮定)．このとき f_{i+1} を

$$f_{i+1} \restriction \bigcup_{k=0}^{i} u_k = f_i, \qquad f_{i+1} \restriction u_{i+1} = h_i \restriction u_{i+1}$$

とすれば，

$$f_{i+1}: \bigcup_{k=0}^{i+1} u_k \longrightarrow \aleph_{\alpha+i+1}$$

は全単射である．かくてすべての $i \in \omega$ について(2)をみたす f_i が定義され

（3） $$f_0 \subset f_1 \subset f_2 \subset \cdots \subset f_i \subset \cdots$$

が成り立つ．いま，

$$f = \bigcup_{i \in \omega} f_i$$

とすれば，(3)により f は関数である．しかも容易にわかるように f は $\bigcup_{i \in \omega}$ から $\aleph_{\alpha+\omega}$ への全単射である．したがって

$$\sum_{i \in \omega} \aleph_{\alpha+i} = \aleph_{\alpha+\omega}. \quad ▨$$

証明の系として，すべての $i \in \omega$ について

$$\sum_{k \in i+1} \aleph_{\alpha+k} = \aleph_{\alpha+i}{}^{\dagger}$$

なることがわかるから

$$\aleph_\alpha + \aleph_{\alpha+1} + \cdots + \aleph_{\alpha+i} = \sum_{k \in i+1} \aleph_{\alpha+k}.$$

ただし左辺の $+$ は基数の和であって $(\cdots((\aleph_\alpha + \aleph_{\alpha+1}) + \aleph_{\alpha+2}) + \cdots) + \aleph_{\alpha+i}$ の略記である．よって $\sum$-記法は合理的である．これにならって

$$\aleph_\alpha + \aleph_{\alpha+1} + \cdots + \aleph_{\alpha+i} + \cdots = \sum_{i \in \omega} \aleph_{\alpha+i}$$

とかく．

問 6． 無限基数はそれより小さい 2 つの基数の和に等しくない．▨

---

† $\sum_{k \leq i} \aleph_{\alpha+k}$ とかいてよい．

4.5 正則順序数

定義 4.5.1 $\langle u, r\rangle$ を全順序集合とし，$v\subseteq u$ とする．

$$\forall a \in u \exists b \in v[a \leq_r b]$$

なるとき，すなわち v が u で有界でないとき，v は u の**共終**部分集合であるという．α, β が順序数であるとき，β が α と**共終**であるとは，

（1） $\exists v[(v \text{ は } \alpha \text{ の共終部分集合}) \wedge \langle\beta, \in\rangle \cong \langle v, \in\rangle]$

が成り立つときをいう．基数は順序数であるから，基数 κ, λ に対しても，“λ が κ と共終” なる概念が得られる．▨

順序数 α, β に対しては，β が α と共終であるための必要十分条件は

（2） $\exists f[f: \beta \longrightarrow \alpha \wedge \alpha = \bigcup \mathrm{Rng}(f)]$

が成り立つことである．なぜなら，(1)が成り立てば $\langle\beta, \in\rangle \overset{f}{\cong} \langle v, \in\rangle$ なる f は(2)の条件をみたす．逆に(2)が成り立てば，$\mathrm{Rng}(f) = v_1$ は α の共終部分集合である．$g`0 = f`0$, $g`(\delta+1) = g`\delta$ より大きい最小の v_1 の元，$g`\delta = \bigcup g``\delta$ $(\delta \in \mathrm{Lim})$ とし，$v = g``\beta$ とすれば v は条件(1)を満足する．

例 1. $\langle\omega, <\rangle$ において $v = \{\alpha \in \omega \mid \exists \beta(\alpha = \beta+\beta)\}$ は ω の共終部分集合である．▨

例 2. 非公式な議論として（有理数の定義，その大小関係などを ZF において展開していないので）：通常の順序に関し，自然数全体の集合 ω は有理数全体の集合 Q の共終部分集合である．▨

例 3. 基数 $\aleph_0(=\omega)$ は基数 $\aleph_\omega$ と共終である．$v = \{\aleph_i \mid i \in \omega\}$ とすれば v は $\beta = \omega$ ととって(1)の $\exists$ の作用範囲の条件を満足するからである．▨

定義 4.5.2 順序数 α と共終な最小の順序数を α の**共終数**といい，$cf(\alpha)$ で表わす：

$cf(\alpha) = \min\{\beta \in \mathrm{OR} \mid \exists v[(v \text{ は } \alpha \text{ の共終部分集合}) \wedge \langle\beta, \in\rangle \cong \langle v, \in\rangle]\}$．▨

$cf(\alpha)$ の直観的意味は，順序型 β をもって下から α に追いつくことができるような最小の順序数 β である．明らかに

$$cf(\alpha) \leq \alpha$$

である．

例 4. $cf(\omega) = \omega$, $cf(\omega+\omega) = \omega$（ただし $\omega+\omega$ は順序数和である），$cf(\aleph_1) = \aleph_1$．最初のものは明白であろう．第2のもの：$v = \{\omega+i \mid i \in \omega\}$ は $\omega+\omega$ の共終部分集合であって順序型 ω をもつ．第3のもの：$\aleph_1$ の任意の共終部分集

合が順序型 $\aleph_1$ をもつことがいえればよい．そこで v を $\aleph_1$ の任意の共終部分集合とする．$\aleph_1$ までの超限帰納法による定義によって次のように $f: \aleph_1 \longrightarrow v$ を定義する：

$$f`\alpha = \min(v - f``\alpha) \qquad (\alpha < \aleph_1).$$

v の共終性から

$$\forall \alpha < \aleph_1 [v - f``\alpha \neq \phi] \wedge \forall \alpha, \beta [\alpha < \beta < \aleph_1 \leftrightarrow f`\alpha < f`\beta].$$

よって $\mathrm{Rng}(f)$ $(\subseteq v)$ は順序型 $\aleph_1$ をもつ．このことから，もし v の順序型が $\aleph_1$ より小さいとすれば，$\aleph_1$ が自分自身より小さい順序数と同等になってしまうから，基数であることに反する．ゆえに v の順序型は $\aleph_1$ でなければならない．▨

定理 4.5.3 $\forall \alpha \in \mathrm{OR}[cf(\alpha) \in \mathrm{Card}]$.

証明 $\beta < cf(\alpha) \rightarrow \beta \not\sim cf(\alpha)$ なることをいえばよい．そこで $\beta < cf(\alpha) \wedge \beta \sim cf(\alpha)$ なる順序数 β が存在するとせよ．よって

$f: \beta \longrightarrow \alpha$ (単射) かつ $\mathrm{Rng}(f)$ は α の共終部分集合

なる f がある．$v = \{\xi \in \beta \mid \forall \gamma < \xi [f`\gamma < f`\xi]\}$ とすれば $f \upharpoonright v$ は順序保存である．任意に $\eta < \alpha$ をとると $\mathrm{Rng}(f)$ の共終性により $\{\xi \in \beta \mid \eta \leq f`\xi\} \neq \phi$ であるから $\xi_\eta = \min\{\xi \in \beta \mid \eta \leq f`\xi\}$ が存在し $\eta \leq f`\xi_\eta$．$\xi_\eta$ の定義から $\gamma < \xi_\eta \rightarrow f`\gamma < \eta \leq f`\xi_\eta$．ゆえに $\xi_\eta \in v$，したがって $f``v = \mathrm{Rng}(f \upharpoonright v)$ は $\alpha$ の共終部分集合．$f``v$ の順序型を β' とすれば，cf の最小性により，$cf(\alpha) \leq \beta' \leq \beta$．これは仮定に反す．よってかかる β は存在しない．▨

定義 4.5.4 $cf(\alpha) = \alpha$ なる順序数 α は**正則**であるといわれる．したがって正則順序数は基数である．よって**正則基数**というのが普通である．正則でない基数を**特異基数**という．▨

例 5. $cf(\aleph_1) = \aleph_1$ であるから $\aleph_1$ は正則基数である．これに反し $cf(\aleph_\omega) = \omega$ であるから $\aleph_\omega$ は特異基数である．▨

問 1. $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$ を証明せよ．▨

定義 4.5.5 基数 $\aleph_\alpha$ は，それが正則でかつ $\alpha \in \mathrm{Lim}$ ならば，**弱到達不能基数**であるという．▨

定理 4.5.6 $\aleph_\alpha$ が弱到達不能基数であるための必要十分条件は，α が正則順序数でかつ $\aleph$-関数の不動点であることである：$\aleph_\alpha = \alpha$.

証明 $\aleph_\alpha$ を弱到達不能とする．正則性と $\alpha \in \mathrm{Lim}$ を用いて

$$\alpha \leq \aleph_\alpha = cf(\aleph_\alpha) = cf(\alpha) \leq \alpha^\dagger.$$

---

† 第2の等式については問3をみよ．

したがって $cf(\alpha)=\alpha$ かつ $\aleph_\alpha=\alpha$. 逆に，α が正則で $\aleph_\alpha=\alpha$ ならば，明白に $\alpha\in\mathrm{Lim}$. そうして $cf(\aleph_\alpha)=cf(\alpha)=\alpha=\aleph_\alpha$. ▨

定義 4.5.7　基数 κ が**強極限的**である(あるいは**強極限基数**である)とは

$$\forall\nu\in\mathrm{Card}\,[\nu<\kappa\to 2^\nu<\kappa]$$

が成り立つときをいう．ただし $\kappa\geq\omega$ とする．▨

$\aleph_0$ は強極限基数である．$\alpha>0$ なる $\aleph_\alpha$ が強極限的ならば $\alpha\in\mathrm{Lim}$ であるが，逆はいえない．順序数 α に対し $\beth_\alpha$ を次のように定義する：

$$\beth_0=\aleph_0,\quad \beth_{\alpha+1}=2^{\beth_\alpha},\quad \beth_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}\beth_\beta\ (\alpha\in\mathrm{Lim}).$$

$\beth$ は**ベース**と読む．ヘブライ語のアルファベット第2文字である．(最初の文字が既出のアレフ $\aleph$ である．)　このとき $\beth_\omega$ は強極限基数である．

定義 4.5.8　$\aleph_0$ より大きい強極限的正則基数を**強到達不能基数**または単に**到達不能基数**という．κ が強到達不能基数であることを $\mathrm{Inac}(\kappa)$ で表わすと

$$\mathrm{Inac}(\kappa)\ \equiv\ cf(\kappa)=\kappa\wedge\forall\nu\in\mathrm{Card}[\nu<\kappa\to 2^\nu<\kappa].$$

したがって強到達不能基数たちは，クラスをなす．それを Inac で表わす．▨

補題 4.5.9　強到達不能基数は弱到達不能である．また，GCH を仮定すれば逆が成り立つ．

証明　$\kappa>\aleph_0$, $cf(\kappa)=\kappa$, $\nu<\kappa\to 2^\nu<\kappa$ とせよ．$\kappa=\aleph_\alpha$ とおく．任意に $\beta<\alpha$ をとると $\aleph_\beta<\aleph_\alpha$ なるゆえ $2^{\aleph_\beta}<\aleph_\alpha$. そこで $2^{\aleph_\beta}=\aleph_\gamma$ とおくと $\aleph_\beta<\aleph_\gamma$ であるから $\beta<\gamma<\alpha$. よって $\alpha\in\mathrm{Lim}$ である．もし GCH が成り立てば，$\alpha\in\mathrm{Lim}$ のとき

$$\beta<\alpha\to 2^{\aleph_\beta}=\aleph_{\beta+1}<\aleph_\alpha$$

となるから，$\aleph_\alpha$ は強極限的となる．▨

定理 4.5.10　κ が強到達不能基数であれば

(3)　$$\forall u\in V_\kappa\forall f\in{}^uV_\kappa[\mathrm{Rng}(f)\in V_\kappa].$$

証明　κ を強到達不能基数とし，$u\in V_\kappa$, $f: u\longrightarrow V_\kappa$ とする．κ は極限数であるから $u\in V_\alpha$ なる順序数 $\alpha<\kappa$ が存在する．$u\subset V_\alpha$ なるゆえ，κ の強極限性を用いて

(4)　$$|\mathrm{Rng}(f)|\leq|V_\alpha|\leq\beth_\alpha<\kappa.$$

このとき $\rho(\mathrm{Rng}(f))<\kappa$ である．なぜなら，もし $\rho(\mathrm{Rng}(f))(=\bigcup\{\rho(f`x)+1|x\in u\})=\kappa$ ならば，$\{\rho(f`x)+1|x\in u\}$ が順序型 $<\kappa$ (∵ (4)) なる κ の共終部分集合となり κ の正則性に反する．ゆえに $\rho(\mathrm{Rng}(f))<\kappa$ でなければならない．したがって $\mathrm{Rng}(f)\in V_\kappa$ である．▨

この定理と次章の結果を用いると，強到達不能基数 κ に対しては V_κ が ZFC

の**モデル**であること，すなわち V_κ で ZFC のすべての公理が成り立つことが導かれる．これについては次章で述べる．さらにゲーデルの**不完全性定理**(例えば[28]を参照)を借用すると次の結果が得られる：

定理 4.5.11　強到達不能基数の存在は ZFC では証明することができない．ただし ZFC は無矛盾であるとする†．▒

弱到達不能基数の存在も ZFC では証明できないことが知られている．これについては第6章で触れるであろう．

問 2.　すべての順序数 α について $\aleph_{\alpha+1}$ は正則である．
問 3.　$\alpha \in \mathrm{Lim}$ ならば $cf(\aleph_\alpha)=cf(\alpha)$．
問 4.　$cf(\alpha+\beta)=cf(\beta)$．▒

4.6 ZF における基数（I）

本節では，選択公理を仮定しない場合，基数をどのように定義すべきかを述べる．整列可能な集合の濃度は，今までどおりの定義を保存する．そうでない集合 u については，順序数と同等でないから u の濃度として順序数にかわるものを見つけなければならないが，それは困難である．よって u の濃度はそれと同等な集合たちによって特徴づけざるを得ない．しかし，かかる集合たち“全体” $\{x|x\sim u\}$ を考えると $u\neq\phi$ なる限りそれは固有クラスになるので，これをもって u の濃度とするわけにいかない．この困難を避けるため，**スコットのからくり**(1961年)と呼ばれる方法を用いる．これは同値類を最小階数条件によって規制し，クラスを削って集合におとしてしまう方法である．(**4.6.2** における(1)の右辺の第2行目をみよ．) 次下，順序数を自由に使うが，順序数は選択公理なしに定義され **3.3**〜**3.8** のすべての結果が ZF で成立することを注意しておこう．したがって超限帰納法は ZF で有効である．

定義 4.6.1　順序数 α が条件

$$\mathrm{Init}(\alpha)\equiv\forall\beta<\alpha[\beta \not\sim \alpha]$$

をみたすならば，α を**始数**という．有限順序数でない始数を**無限始数**という．始数全体のクラスを Init，無限始数全体のクラスを Init_ω で表わす．▒

---

†　数学の公理系 T が**無矛盾**であるとは，T を展開できる(第1階の)言語に関する述語論理へ T を公理として加えた公理体系において，$\varphi\wedge\neg\varphi$ という形の論理式が決して証明できないことをいう．いま述べた公理体系で $\varphi\wedge\neg\varphi$ という形の論理式が証明できるならば，公理系 T は**矛盾する**という．公理系 T が矛盾するときは，述語論理の初歩的議論により，任意の論理式が上述の公理体系から証明できることがわかるから，体系としては無意味なものになってしまう．

容易にわかるように

$$\mathrm{Init}=\mathrm{Card}$$

である．すなわち ZFC では，基数は始数と同意語である．

定義 4.6.2　集合 u に対し u の濃度 $\overline{\overline{u}}$ を

$$(1)\quad \overline{\overline{u}}=\begin{cases} u\text{と同等な最小の順序数} \cdots\cdots & u\text{が整列可能のとき} \\ \{x|x\sim u\wedge\forall y[y\sim u\to\rho(x)\leq\rho(y)]\} \cdots\cdots & \text{そうでないとき}\end{cases}$$

によって定義する．集合の濃度を基数という． u が整列可能ならば $\overline{\overline{u}}=|u|$ であり，これを**整列可能基数**という．そうでないとき $\overline{\overline{u}}$ を**整列不能基数**という．▒

ここで定義が合法的であること，すなわち“$\overline{\overline{u}}$ が集合であること”を示さねばならない．しかしそれは容易である．整列可能基数は順序数であるから，それが集合であることは論をまたない．u が整列可能でないときは，$\overline{\overline{u}}$ は $u\sim x$ となる集合 x のうち階数が最小のものたちを集めたものである．よって $\rho(u)=\alpha$ とすると $\overline{\overline{u}}\subset V_{\alpha+1}$ であるから，$\overline{\overline{u}}$ は集合 $V_{\alpha+1}$ の部分クラスとして集合である．この場合明らかに $\overline{\overline{u}}\notin \mathrm{OR}$ である．同じ階数の集合をいくつか集めた集合は(1でない限り)順序数でないからである．

始数と整列可能基数とは同意語である．

補題 4.6.3　$\overline{\overline{u}}=\overline{\overline{v}}\leftrightarrow u\sim v$.

証明　u が整列可能なら，$\overline{\overline{u}}=\overline{\overline{v}}$ または $u\sim v$ のとき v も整列可能であるからこの同値性は明らかである．そこで u が整列可能でないとする．$\overline{\overline{u}}=\overline{\overline{v}}$ ならば v も整列可能でない．そのときもし $u\not\sim v$ ならば，$u\sim x\to x\not\sim v$ であるから $\overline{\overline{u}}\cap\overline{\overline{v}}=\phi$，したがって $\overline{\overline{u}}\neq\overline{\overline{v}}$. ゆえに $u\sim v$ でなければならない．逆は，定義から明らかである．▒

定義 4.6.4　$\overline{\overline{u}}\leq\overline{\overline{v}}\equiv\exists f[f: u\xrightarrow{1\text{-}1}v]$. ▒

定理 4.6.5　(カントル・ベルンシュタインの定理)

$$\overline{\overline{u}}\leq\overline{\overline{v}}\wedge\overline{\overline{v}}\leq\overline{\overline{u}}\to\overline{\overline{u}}=\overline{\overline{v}}.$$

証明　**4.6.3** により $u\sim v$ をいえばよい．証明は第1章(**1.5.4**)で述べたものと同様である．選択公理が用いられていないことに注意する必要があるだけである．▒

今後本章では，基数をドイツ小文字 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\cdots$ で表わす．基数全体のクラスを(Card と区別して) Kard で表わすことにする．(もちろん ZFC では Kard＝Card である．)基数の間には **4.6.4** によって関係 $\leq$ が定義されているが，カントル・ベルンシュタインの定理によって $\langle\mathrm{Kard},\leq\rangle$ は順序構造で

あることがわかる．また整列可能基数の間では $\le$ は順序数としての $\le$ と一致する．すなわち u, v が整列可能ならば

$$\overline{\overline{u}}\le\overline{\overline{v}} \leftrightarrow \overline{\overline{u}} \in \overline{\overline{v}} \vee \overline{\overline{u}}=\overline{\overline{v}}.$$

(したがって，AC が成り立つ宇宙では，任意の基数は整列可能基数であるから，すべての基数は(順序数の大きさとして)整列されることになる．)

基数 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ に対し

$$\mathfrak{a}<\mathfrak{b} \equiv \mathfrak{a}\le\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}\neq\mathfrak{b}$$

と定義する．$\le$ が Kard 上の全順序であるという命題は，ZF では証明できないことが知られているが詳細は省く．ここで基数についてのいくつかの性質を問として挙げておこう．

問 1. $x\subseteq y \to \overline{\overline{x}}\le\overline{\overline{y}}$.

問 2. $\mathfrak{a}\le\overline{\overline{y}} \to \exists x\subseteq y[\overline{\overline{x}}=\mathfrak{a}]$.

問 3. $\overline{\overline{u}}<\overline{\overline{\mathcal{P}(u)}}$ （カントルの定理）.

問 4. $\mathfrak{a}$ が整列可能基数で $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ ならば，$\mathfrak{b}$ は整列可能基数である．▨

次の定理は，どんな基数 $\mathfrak{a}$ に対しても $\mathfrak{b}\not\le\mathfrak{a}$ となる整列可能基数 $\mathfrak{b}$ が存在することを述べている．

定理 4.6.6 （ハルトークスの定理）

$$\forall u\, \exists \alpha \in \mathrm{OR}[\overline{\overline{\alpha}}\not\le\overline{\overline{u}} \wedge \overline{\overline{\alpha}}\le\overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(u\times u))}}].$$

証明 $a=\{r \mid \exists v\subseteq u[r\, \mathrm{W_0}\, v \wedge \forall x \in v(\langle x, x\rangle \in r)]\}$

とする．すなわち a は v のある部分集合を整列するような反射的順序 r たちの集合である．a が集合であることは $a\subseteq\mathcal{P}(u\times u)$ から従う．いま，$f: a \longrightarrow$ OR を

$$f`r=\iota\alpha[\langle \mathrm{Dom}(r), r\rangle\cong\langle\alpha, \in |\alpha\rangle]$$

によって定義する．f, $\mathrm{Rng}(f)$ は置換公理などによって集合であるが，さらに $\mathrm{Rng}(f)$ は順序数からなる推移的集合である．したがって **3.3.6** により，それは一つの順序数である．これを α とおく．$\overline{\overline{\alpha}}\not\le\overline{\overline{u}}$ なることを示すために g: $\alpha \xrightarrow{1\text{-}1} u$ なる g があるとしよう．$s=\{\langle g`\beta, g`\gamma\rangle \mid \beta\le\gamma<\alpha\}$ とすれば s は反射的で $s\, \mathrm{W_0}\, g``\alpha$. $g``\alpha\subseteq u$ であるから $s \in a$ かつ $f`s=\alpha$. したがって $\alpha \in \mathrm{Rng}(f)=\alpha$. これは不合理．ゆえに $\overline{\overline{\alpha}}\not\le\overline{\overline{u}}$ でなければならない．いま，

$$h: \alpha \longrightarrow \mathcal{P}(a)$$

を，$\beta \in \alpha$ に対し $h`\beta=f^{-1}``\{\beta\}$ によって定義すれば，h は単射である．$a\subseteq\mathcal{P}(u\times u)$ であったから $\mathcal{P}(a)\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{P}(u\times u))$. よって $\overline{\overline{\alpha}} \le \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathcal{P}(u\times u))}}$. ▨

定義 4.6.7 Γ: Kard $\longrightarrow$ OR

$$\Gamma`\mathfrak{a}=\min\{ \alpha \in \mathrm{OR} \mid \overline{\overline{\alpha}}\not\le\mathfrak{a} \}$$

なるクラス関数 Γ を**ハルトークス関数**という．$\Gamma`\mathfrak{a}$ は始数である．▨

明らかに $\Gamma`\mathfrak{a}\not\leq\mathfrak{a}$．そこで超限帰納法によって ω_α ($\alpha\in\mathrm{OR}$) を次のように定義する．

定義 4.6.8
$$\begin{cases}\omega_0=\omega\\ \omega_{\alpha+1}=\Gamma`\omega_\alpha\\ \omega_\alpha=\bigcup\{\omega_\beta\mid\beta<\alpha\} & (\alpha\in\mathrm{Lim})\end{cases}$$ ▨

定理 4.6.9 (i)　α のクラス関数として ω_α は真の増大クラス関数である．

(ii)　集合 x に対し　$x\in\mathrm{Init}_\omega\leftrightarrow\exists\alpha\in\mathrm{OR}[x=\omega_\alpha]$．

証明　α についての超限帰納法で

(2)　$$\forall\beta<\alpha\ [\omega_\beta<\omega_\alpha]$$

(3)　$$\omega_\alpha\in\mathrm{Init}_\omega$$

を証明する．$\alpha=0$ のとき自明．$\alpha=\xi+1$ のとき．帰納法の仮定によって $\beta=\xi$ の場合に(2)を証明すればよい．したがって $\omega_\alpha=\Gamma`\omega_\beta$ である．帰納法の仮定により $\omega_\beta\in\mathrm{Init}_\omega$ であり，したがって整列可能基数であるから

$$\begin{aligned}\omega_\alpha=\Gamma`\omega_\beta&=\min\{\gamma\in\mathrm{OR}\mid\bar{\bar{\gamma}}\not\leq\omega_\beta\}\\&=\min\{\gamma\in\mathrm{OR}\mid\omega_\beta<\bar{\bar{\gamma}}\}\\&=\omega_\beta\text{ より大きい最小の始数．}\end{aligned}$$

$\alpha\in\mathrm{Lim}$ のとき．$\omega_\alpha=\bigcup\{\omega_\beta\mid\beta<\alpha\}=\sup\{\omega_\beta\mid\beta<\alpha\}$．順序数の集合の和は順序数であるから $\omega_\alpha\in\mathrm{OR}$ であって $\beta<\alpha\rightarrow\omega_\beta\leq\omega_\alpha$．$\alpha\in\mathrm{Lim}$ より $\beta<\alpha\rightarrow\omega_\beta<\omega_\alpha$．もし $\omega_\alpha\notin\mathrm{Init}$ ならば $\gamma<\omega_\alpha\wedge\gamma\sim\omega_\alpha$ なる順序数 γ があり，したがって $\gamma<\omega_\beta$ なる $\beta<\alpha$ がある．$\omega_{\beta+1}<\omega_\alpha\sim\gamma<\omega_\beta$ であるからカントル-ベルンシュタインの定理により $\omega_\beta=\omega_{\beta+1}$ となり帰納法の仮定に反す．ゆえに $\omega_\alpha\in\mathrm{Init}$，したがって $\omega_\alpha\in\mathrm{Init}_\omega$．これですべての $\alpha\in\mathrm{OR}$ について(2)，(3)が成り立つことが証明された．あとは

(4)　$$x\in\mathrm{Init}_\omega\rightarrow\exists\alpha[x=\omega_\alpha]$$

の証明のみが残っている．(4)が成立しないとする．クラス $\{\omega_\alpha\mid\alpha\in\mathrm{OR}\}$ に入らない無限始数が存在するから，γをかかる最小のものとしよう．(2)と置換公理とによって $\{\omega_\alpha\mid\alpha\in\mathrm{OR}\}$ は OR の部分クラスであって集合でないので，$\gamma<\omega_\alpha$ なる最小の ω_α が存在する．$\alpha\neq0$ は明白．そこで $\alpha=\beta+1$ とすると

$$\omega_\beta<\gamma<\omega_{\beta+1}=\Gamma`\omega_\beta.$$

γは始数なるゆえ，これは Γ の定義に反する．また $\alpha\in\mathrm{Lim}$ ならば，$\gamma<\omega_\delta<\omega_\alpha$ なる ω_δ が存在する．しかしこれは ω_α の選び方に反する．いずれにしても不

合理が生ずるから(4)が成立しなければならない. ▨

系 4.6.10 $\forall\alpha\in\mathrm{OR}[\omega_\alpha=\aleph_\alpha]$.

証明 $\mathrm{Card}_\omega=\mathrm{Init}_\omega$ と **4.6.9** とから直ちに従う. ▨

4.7 ZF における基数(Ⅱ)

本節もことわりがなければ, ZF で考える. 有限集合とは, ある自然数(すなわちωのある要素)と同等な集合であり, 有限でない集合を無限集合と呼んだ. ZFC では選択公理にもとづいて“無限集合は, 自分自身と同等な真部分集合をもつ”という命題が成立することを知っている. 選択公理をもたない ZF では, この命題によって無限集合を特徴づけることができない. すなわち, 無限集合であって, 自分自身と同等な真部分集合をもたないようなものが存在し得る. このような集合は, デデキント有限な集合と呼ばれる:

定義 4.7.1 集合uがそのどんな真部分集合とも同等でないならば, uは**デデキント有限**(D-有限と略記する)であるという. D-有限な集合たちのクラスを D-Fin で表わす:

$$u\in D\text{-Fin}\ \equiv\ \neg\,\exists v[v\subset u\wedge v\sim u].$$

D-有限集合uに対する $\overline{\overline{u}}$ を**デデキント有限基数**(D-有限基数)という. ▨

系 4.7.2 (i) 有限集合は D-有限である.

(ii) $\mathrm{ZFC}\vdash u\in D\text{-Fin}\to u\in\mathrm{Fin}$.

(iii) 無限な整列可能集合は D-有限でない.

(iv) D-有限集合の部分集合は D-有限である. ▨

定義 4.7.3 D-有限でない集合を ***D*-無限**という. ▨

定理 4.7.4 “D-有限な無限集合が存在する”という命題は ZF と矛盾しない. ▨

この定理の証明は省略する.

なお ZF が無矛盾ならば, ZF において **4.3.5** を証明することができない, すなわち“実数全体の集合 $\mathcal{R}$ が可算個の可算集合たちの和である”という命題が ZF と矛盾しないことが証明できるのである. これらについて詳細を知りたい読者は, [19] を参照されたい.

ZF で基数についての算術を展開することは可能であるが, いろいろな困難があって実り多い結果は期待できない. ここでは基数の和, 積の定義だけを述べておく. それは **4.4.1** と同様である.

定義 4.7.5 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathrm{Kard}$ とする．

(i) $\mathfrak{a}=\overline{\overline{u}}$, $\mathfrak{b}=\overline{\overline{v}}$, $u\cap v=\phi$ なる集合 u, v が存在する．このとき $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\overline{\overline{u\cup v}}$ と定める．

(ii) $\mathfrak{a}=\overline{\overline{u}}$, $\mathfrak{b}=\overline{\overline{v}}$ なる集合 u, v に対し $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\overline{\overline{u\times v}}$ と定める．▨

基数の和，積の定義が u, v の選び方に依存しないことは容易にわかる．

有限基数でない基数を無限基数といい，それら全体のクラスを IKard で表わす．これに関し興味ある一結果を紹介しておこう．

定理 4.7.6 $\mathrm{ZF} \vdash \forall \mathfrak{a} \in \mathrm{IKard}(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}=\mathfrak{a}) \rightarrow \mathrm{AC}$. ▨

これを証明するために，補題を準備する．

補題 4.7.7 $\mathfrak{a}$ が無限基数で κ が無限整列基数であるとする．そのとき

(1) $$\mathfrak{a}+\kappa=\mathfrak{a}\cdot\kappa \rightarrow \mathfrak{a}\leq\kappa \vee \kappa\leq\mathfrak{a}.$$

よって特に

(2) $$\mathfrak{a}+\Gamma`\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\cdot\Gamma`\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{a}\text{ は整列可能基数である.}$$

証明 $\mathfrak{a}$ が整列可能基数である場合は自明であるから，そうでないとする．(1)の前提によって

$$\mathfrak{a}=\overline{\overline{u}},\quad \kappa=\overline{\overline{v}},\quad u\cap v=\phi,\quad \overline{\overline{u\cup v}}=\overline{\overline{u\times\kappa}}$$

なる集合 u, v が存在する．仮定により $\overline{\overline{u\cup v}}$, $\overline{\overline{u\times\kappa}}$ は整列可能基数でない．そこで任意に一つ $z\in\overline{\overline{u\times\kappa}}$ をとる．$u\times\kappa\sim z$ を与える全単射を f とする．また $z\in\overline{\overline{u\cup v}}$ であるから $u\cup v\sim z$ を与える全単射を g とすると $z=g``u\cup g``v$, $g``u\cap g``v=\phi$. もし $\forall t\in u\,\exists\alpha\in\kappa[f`\langle t, \alpha\rangle\in g``v]$ ならば，$u$ から $v$ への単射を定義することができる（$\alpha$ としてかかる最小のものをとればよい.）から $\overline{\overline{u}}\leq\overline{\overline{v}}=\kappa$. これは $\mathfrak{a}$ が整列可能基数であることを意味するから仮定に反する．よって $\forall\alpha\in\kappa[f`\langle t, \alpha\rangle\notin g``v]$ すなわち $\forall\alpha\in\kappa[f`\langle t, \alpha\rangle\in g``u]$ なる $t\in u$ が存在する．よって κ から u への単射が存在し，したがって $\kappa\leq\overline{\overline{u}}=\mathfrak{a}$. (2)は(1)と $\Gamma`\mathfrak{a}\nleq\mathfrak{a}$ とから直ちに従う．▨

補題 4.7.8 $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2=\mathfrak{a}^2+\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}+\mathfrak{b}^2$.†

証明 $\overline{\overline{u}}=\mathfrak{a}$, $\overline{\overline{v}}=\mathfrak{b}$, $u\cap v=\phi$ とする．このとき

$$(u\cup v)\times(u\cup v) \sim (u\times u)\cup(u\times v)\cup(v\times u)\cup(v\times v).$$

右辺の 4 つの集合は互いに素である．よって

$$\overline{\overline{(u\cup v)\times(u\cup v)}}=\overline{\overline{(u\times u)\cup(u\times v)\cup(v\times u)\cup(v\times v)}}.$$ ▨

定理 4.7.6 の証明 仮定と **4.7.8** により

$$\mathfrak{a}+\Gamma`\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}+\Gamma`\mathfrak{a})^2=\mathfrak{a}^2+\mathfrak{a}\cdot\Gamma`\mathfrak{a}+(\Gamma`\mathfrak{a})\cdot\mathfrak{a}+(\Gamma`\mathfrak{a})^2\geq\mathfrak{a}\cdot\Gamma`\mathfrak{a}.$$

---

† $\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}^2$ と略記する．

$\mathfrak{a}+\Gamma`\mathfrak{a}\leq\mathfrak{a}\cdot\Gamma`\mathfrak{a}$ は明白であるから $\mathfrak{a}+\Gamma`\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\cdot\Gamma`\mathfrak{a}$. ゆえに **4.7.7** により $\mathfrak{a}$ は整列可能基数である. $\mathfrak{a}$ は任意の無限基数であったから, このことは任意の無限集合が整列可能であることを意味する. よって **3.9.2** により AC が成立する. ▨

演習問題 IV

以下 ZFC で考える. κ, λ は無限基数で, κ^+ は κ の次の基数を表わす. α, β は順序数である.

1. 次を証明せよ.

1) $\kappa\leq\lambda\rightarrow\kappa^\lambda=2^\lambda$. 特に $\kappa^\kappa=2^\kappa$.

2) $\kappa\leq\lambda\rightarrow\lambda^\kappa\leq\lambda^\lambda=2^\lambda$.

3) $\kappa\leq\lambda\rightarrow\lambda^\kappa=|[\lambda]^\kappa|$, ここに $[u]^\kappa=\{x\subseteq u\,|\,|x|=\kappa\}$.

4) $|[\kappa]^\kappa|=2^\kappa$.

2. $|\{f\,|\,f:\kappa\xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}}\kappa\}|=2^\kappa$ を証明せよ.

3. 次を証明せよ.

1) $\aleph_\alpha\leq\beth_\alpha$

2) $\beth_\alpha=|V_{\omega+\alpha}|$

3) $\alpha\leq\beta\rightarrow{\beth_\alpha}^{\beth_\beta}=\beth_{\beta+1}$

4) $\alpha+1>\beta\rightarrow{\beth_{\alpha+1}}^{\beth_\beta}=\beth_{\alpha+1}$

5) $\kappa\in\mathrm{Inac}\rightarrow\beth_\kappa=\kappa$; 特に $|V_\kappa|=\kappa$.

6) $\kappa\in\mathrm{Inac}\leftrightarrow\kappa$ は正則 $\wedge\ \beth_\kappa=\kappa$.

4. GCH を仮定する: $\forall\kappa\in\mathrm{Card}_\omega[2^\kappa=\kappa^+]$. このとき

$$\kappa^\lambda=\begin{cases}\kappa & if\ \ \lambda<cf(\kappa)\\ \kappa^+ & if\ \ cf(\kappa)\leq\lambda\leq\kappa\\ \lambda^+ & if\ \ \kappa\leq\lambda.\end{cases}$$

5. 各 $\aleph_\alpha$ は極限順序数である.

6. 演習問題 III の 8 における整列順序 $\langle \mathrm{OR}^2, \lessdot\rangle$ に関し, $\langle\aleph_\alpha\times\aleph_\alpha, \lessdot|\aleph_\alpha\times\aleph_\alpha\rangle\cong\langle\aleph_\alpha, <\rangle$ が成り立つ. 系として $\aleph_\alpha\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha$ が得られる.

7. **4.4.10** を証明せよ.

8. $\aleph_\alpha$ は特異基数とする. $\gamma<\alpha\wedge\forall\beta[\gamma\leq\beta<\alpha\rightarrow2^{\aleph_\gamma}=2^{\aleph_\beta}]$ が成り立てば, $2^{\aleph_\gamma}=2^{\aleph_\alpha}$ であることを証明せよ.

9. κ を無限基数とし $HE_\kappa=\{x\,|\,|x|<\kappa\wedge\forall y[y\in\mathrm{TC}(x)\rightarrow|y|<\kappa]\}$, H_κ

$=\{x \mid |\mathrm{TC}(x)|<\kappa\}$ とおく．HE_κ の要素を**基数が遺伝的に κ より小さい集合**という．このとき，次の事実を証明せよ．

1) $H_\kappa \subseteq HE_\kappa$．もし κ が正則ならば，$H_\kappa = HE_\kappa$．

2) $HE_\kappa \subseteq V_\kappa$，したがって HE_κ，H_κ は集合である．

3) $|H_\kappa| = 2^{<\kappa}$．ここに $2^{<\kappa} = \sup\{2^\nu \mid \nu<\kappa\}$ である．

10. $\forall x[|\rho(x)| \leq |\mathrm{TC}(x)|]$ を証明せよ．

11. $u \subset \mathrm{OR}$ とする．$\forall v \subset u[v \neq \phi \wedge v$ は u で有界 $\to \bigcup v \in u]$ ならば u は**閉**であるという．$u \subseteq \alpha$ で u が α で有界でないなら，u は α で**非有界**（u. b.）であるという．u が閉でかつ α で非有界なら c. u. b. in α または club in α であるという．

1) u が閉である $\leftrightarrow$ $\forall \beta \in u[\beta \cap u \neq \phi \to \bigcup(\beta \cap u) \in u]$．

2) 与えられた α に対し $\{\beta<\alpha \mid \beta \in \mathrm{Lim}\}$ は閉である．

3) κ が ω より大きい基数ならば $\{\beta<\kappa \mid \beta \in \mathrm{Lim}\}$ は club in κ である．

4) $\kappa>\omega$ が正則で各 $\alpha<\kappa$ に対し u_α が club in κ ならば

$$d=\{\beta \mid \forall \alpha<\beta[\beta \in u_\alpha]\}=\{\beta \mid \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} u_\alpha\}$$

は club in κ である．d を $\{u_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ の**対角共通部分**という．

12. $I_1=\{x \in \mathcal{R} \mid 0<x \leqq 1\}$ とおく．${}^\omega\omega \sim I_1$ なることを直接証明せよ．

13. κ が特異基数なら κ より小さい(少なくとも) $cf(\kappa)$ 個の正則基数が存在する．

14. κ は ω より大きい基数とする．κ が可測基数である（または可測である）とは，κ 上の κ-加法的 2 値測度が存在することである．ここに μ が κ 上の κ-加法的 2 値測度であるとは，μ: $\mathcal{P}(\kappa) \longrightarrow 2$ であって，次の条件がみたされるときをいう：

1°) $\mu(\kappa)=1$,　　2°) 各 $\alpha \in \kappa$ に対し，$\mu(\{\alpha\})=0$,

3°) $\lambda<\kappa$ であって，$\{u_\alpha \mid \alpha<\lambda\}$ が 2 つずつ互いに素な κ の部分集合たちの族とする．すなわち，$u_\alpha \subset \kappa$ で $\alpha \neq \beta \to u_\alpha \cap u_\beta = \phi$．このとき

$$\mu(\bigcup_{\alpha<\lambda} u) = \sum_{\alpha<\lambda} \mu(u_\alpha).$$

次の定理を証明せよ．

定理　κ が可測基数ならば，κ は強到達不能基数である．（従って，可測基数の存在は ZFC では証明できない．）▨

5

レヴィ階層と反映定理

前章までは，集合論の基礎部分の議論であった．本章以降はいわば集合論の展開部というところである．本章では，論理式や集合に対し階層を導入し，重要なよく用いられる論理式や集合が低い階層に属し，それゆえに特別な有用な性質をもつことを導く．階層の導入に先立ってモデルの概念とモストウスキーの同型定理を述べておく．

5.1 モストウスキー同型定理

A が**空でない**クラスで R が A 上の 2 項関係(すなわち $R\subseteq A\times A$)のとき，$\langle A, R\rangle$ を**集合論言語 $\mathcal{L}$ に対する構造**といい，A をその**領域**，R をその**関係**という．本章では他の言語に対する構造を取り扱わないので強調する言い方の場合を除いて単に構造ということにする†．A が集合のときは R も集合である

† 他の構造の例として群の構造について簡単に述べよう．集合 G（群を取り扱う数学の慣例に従って大文字 G を用いた．クラスを考えているわけではない．）の任意の要素 a, b に対し $a\cdot b$（a と b の**積**と呼ばれる）で表わされる G の要素が一意的に定まり次の公理が満たされるとき，G は**群**であるという：

$$\forall a, b, c[(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)]\wedge\exists e[\forall a(e\cdot a=a)\wedge\forall a\exists x(x\cdot a=e)]$$

かかる e は一意的で，**単位元**と呼ばれる．a に対し $x\cdot a=e$ なる x も一意的であるから x を a^{-1} で表わし a の**逆元**という．よって群の仕組は単位元 e と積演算および逆元演算で決まるから

$$\langle G, \cdot, ^{-1}, e\rangle$$

が**群の構造**である．これが群の公理(e, $^{-1}$ を用いて書き改めたもの)

(i) $\forall a, b, c[(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)]$

(ii) $\forall a(e\cdot a=a)$

(iii) $\forall a(a^{-1}\cdot a=e)$

をみたすならば G は群であるというわけである．このとき $\langle G, \cdot, ^{-1}, e\rangle$ は公理系(i)～(iii)の**モデル**であるという．したがって群公理の一つのモデルを群ということになる．

なお **3.5** に自然数論に対する構造が現われた．

から対 $\langle A, R\rangle$ は一つの集合であり ZF の対象物であるが，A が固有クラスの場合は $\langle A, R\rangle$ はクラスでもないので ZF の対象物でなく，単にクラス A と R を並べた超理論の対象として取り扱われるものである．このことは **3.1** におけると同様である．

また構造を $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\cdots$ などで表わす．

定義 5.1.1 $\mathcal{A}=\langle A, R\rangle$ を構造とし，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ は $x_1, \cdots, x_n$ のみを自由変数にもつ $\mathcal{L}$ の論理式とする．$a_1, \cdots, a_n \in A$ に対し

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$$

($\mathcal{A}$ は $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ をみたす，または $\varphi(a_1, \cdots, a_n)$ は $\mathcal{A}$ で成り立つと読む)を φ の構成についての帰納法で次のように定義する．

1°) φ が $x \in y$ または $x=y$ であるとき．$a, b \in A$ に対し

$$\mathcal{A} \models a \in b \quad \equiv \quad aRb \ \text{(i.e. } \langle a, b\rangle \in R)$$
$$\mathcal{A} \models a=b \quad \equiv \quad a=b.$$

2°) φ が $\psi_1 \vee \psi_2$, $\psi_1 \wedge \psi_2$, $\psi_1 \to \psi_2$, $\neg\psi$ なる形の一つであるとき，$a_1, \cdots, a_n \in A$ に対し

$$\mathcal{A} \models \psi_1(a_1, \cdots, a_n) \begin{smallmatrix}\vee\\ \wedge\\ \to\end{smallmatrix} \psi_2(a_1, \cdots, a_n)$$
$$\equiv (\mathcal{A} \models \psi_1(a_1, \cdots, a_n) \begin{smallmatrix}\vee\\ \wedge\\ \to\end{smallmatrix} \mathcal{A} \models \psi_2(a_1, \cdots, a_n))$$

$$\mathcal{A} \models \neg\psi(a_1, \cdots, a_n) \quad \equiv \quad \neg(\mathcal{A} \models \psi(a_1, \cdots, a_n)).$$

3°) φ が $\exists x\psi$ または $\forall x\psi$ という形のとき．$a_1, \cdots, a_n \in A$ に対し

$$\mathcal{A} \models \exists x\psi(x, a_1, \cdots, a_n) \quad \equiv \quad \exists x \in A(\mathcal{A} \models \psi(x, a_1, \cdots, a_n))$$
$$\mathcal{A} \models \forall x\psi(x, a_1, \cdots, a_n) \quad \equiv \quad \forall x \in A(\mathcal{A} \models \psi(x, a_1, \cdots, a_n)).$$

また，φ が自由変数を含まない論理式(＝文)であるとき

$$\mathcal{A} \models \varphi$$

ならば，$\mathcal{A}$ は φ の**モデル**であるという．もし $\mathcal{A}$ が公理系 I ～ IX のすべての公理(全称閉包をとるものとする)のモデルであれば，$\mathcal{A}$ は ZFC **のモデル**であるという．それを

$$\mathcal{A} \models \mathrm{ZFC}$$

で表わすことがある．ZF のモデル，Z, ZC のモデルなどについても同様である．特に $R=E|A$ のときはこれを $\in_A$ で表わし $\langle A, \in_A\rangle$ を $\in$-**構造**という．$\langle A, \in_A\rangle \models \mathrm{ZFC}$ ならば A は ZFC の $\in$-**モデル**であるという．▨

Ω を論理式のある集合とするとき，Ω の ($\in$-) モデルという概念も同様に定義される．

さて $\mathcal{L}$ の論理式 φ に対し φ に現われる $\exists x$, $\forall x$ を，それぞれ $\exists x \in A$, $\forall x \in A$ でおきかえて得られる論理式を φ の A による**相対化**といい

$$\varphi^A$$

で表わす．よって**文** φ に対し

$$\langle A, \in_A \rangle \models \varphi \ \leftrightarrow \ \varphi^A$$

である．

以下では $\langle A, \in_A \rangle$ を $\langle A, \in \rangle$ と略記することが多い．$x_1, \cdots, x_n$ が論理式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ に現われる全自由変数ならば，$a_1, \cdots, a_n \in A$ に対し

$$\langle A, \in \rangle \models \varphi(a_1, \cdots, a_n) \leftrightarrow \varphi^A(a_1, \cdots, a_n)$$

である．

定義 5.1.2　R が A 上の 2 項関係のとき

$$\forall x, y \in A[\forall z \in A(zRx \leftrightarrow zRy) \to x=y]$$

が成り立つならば，R は**外延的**である，あるいは構造 $\langle A, R \rangle$ は**外延的**であるという．▒

R が外延的であることは，R をあたかも $\in$-関係とみたとき外延公理が成立していることを意味する．

例 1.　α を順序数とする．$\langle \alpha, \in \rangle$ は外延的である．▒

定理 5.1.3　**（モストウスキー同型定理）**　$\langle A, R \rangle$ が有基底的な外延的構造で $A=\mathrm{Fld}(R)$ であるとき

$$\langle A, R \rangle \cong \langle M, \in \rangle$$

をみたす推移的クラス M がただ一つ存在する．しかもこの同型対応もただ一つしかない．

ここで，2 つの構造 $\langle A, R \rangle$, $\langle B, S \rangle$ が同型（$\cong$ で表わす）であるとは，$F\colon A \longrightarrow B$（全単射）が存在して

$$\forall x, y \in A[\, xRy \leftrightarrow (F`x)S(F`y)\,]$$

が成り立つことである．▒

A が集合のとき**集合形同型定理**，一般のとき**クラス形同型定理**と呼ぶことがある．集合形の場合，M はもちろん推移的集合として存在するのである．さてこの定理を証明するために **3.6.11** を必要とする．その証明は延期されていたので，それを論じよう．まず定理を再掲する：

定理 3.6.11　R が有基底的関係で，G がクラス関数ならば，

（1）　　$\forall x \in \mathrm{Fld}(R)[F`x = G`\langle x, F \restriction \mathrm{Seg}_R(x) \rangle]$

をみたす $\mathrm{Fld}(R)$ 上のクラス関数 F がただ一つ存在する．ここで $\mathrm{Seg}_R(x)=$

$\{y \mid \langle y, x\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \notin R\}$ である．▨

これを証明するために少し準備が必要である．2項関係 R ($\subseteq V\times V$) とクラス A とが与えられたとき，$R^{-1}``A \subseteq A$ が成り立つならば，すなわち

$$\forall x \in A \forall y (yRx \to y \in A)$$

が成立するならば，A は R-**左閉**であるという．もし R が全順序なら，A が R-左閉であることは A が R-始切片であるかまたは $\mathrm{Fld}(R)$ 自身であることを意味する．R-**右閉**の概念も同様に定義される．

補題 5.1.4　R が有基底的関係，G がクラス関数，A, A' は R-左閉クラスであるとする．さらに F, F' はそれぞれ A, A' 上のクラス関数で，しかも任意の $x \in A$, $x' \in A'$ に対し

(2)　$F`x = G`\langle x, F\restriction \mathrm{Seg}_R(x)\rangle$,　　$F'`x' = G`\langle x, F'\restriction \mathrm{Seg}_R(x')\rangle$

が成り立つものとする．このとき F と F' は**両立する**，すなわち

(3)　$$x \in A \cap A' \to F`x = F'`x.$$

証明　定理 **3.6.9** (ii) (R に関する帰納法原理)を用いて (3) を証明するために

(4)　$x \in A \cap A'$,　　$\forall y[y \in \mathrm{Seg}_R(x) \wedge y \in A \cap A' \to F`y = F'`y]$

が成り立っていると仮定する．したがって

$$F\restriction \mathrm{Seg}_R(x) = F'\restriction \mathrm{Seg}_R(x)$$

であるから(2)によって

$$F`x = G`\langle x, F\restriction \mathrm{Seg}_R(x)\rangle = G`\langle x, F'\restriction \mathrm{Seg}_R(x)\rangle = F'`x$$

ゆえに帰納法原理により(3)が成立する．▨

補題 5.1.5　R は有基底的関係，G はクラス関数であるとする．このときクラス

$$T = \{f \mid \mathrm{Func}(f) \wedge [\mathrm{Dom}(f) \text{ は } R\text{-左閉}] \wedge \forall x \in \mathrm{Dom}(f)[f`x = G`\langle x, f\restriction \mathrm{Seg}_R(x)\rangle]\}$$

に対し

$$F = \bigcup T = \bigcup\{f \mid f \in T\}$$

なる F は $\mathrm{Fld}(R)$ 上のクラス関数で(1)を満足する．

証明　$f, f' \in T$ とすれば **5.1.4** により f, f' は両立する．よって $F = \bigcup T$ はクラス関数である．F が $\mathrm{Dom}(F)$ 上で(1)をみたすことを証明するために $x \in \mathrm{Dom}(F)$ とする．F の定義からある $f \in T$ があって $x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge F`x = f`x$. $\mathrm{Dom}(f)$ は R-左閉なるゆえ $\mathrm{Seg}_R(x) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. そのときすぐわかるように $F\restriction \mathrm{Seg}_R(x) = f\restriction \mathrm{Seg}_R(x)$. よって

$$F'x=f'x=G'\langle x, f\upharpoonright \mathrm{Seg}_R(x)\rangle=G'\langle x, F\upharpoonright \mathrm{Seg}_R(x)\rangle.$$

$\mathrm{Dom}(F)=\mathrm{Fld}(R)$ の証明が残っている．これは改めて述べることにし，いったんこの補題の証明を打ち切る．▨

R が反射的２項関係で，$x, y\in \mathrm{Fld}(R)$ とする．長さ $n+1$ の有限列 h が

（５）　$h_0=x,\quad h_n=y,\quad \forall i<n[h_i\in \mathrm{Seg}_R(h_{i+1})]$

をみたすならば，h は x から y への（長さ $n+1$ の）R-**鎖**であるという．

定義 5.1.6　R が反射的２項関係のとき

$$R^*=\{\langle x, y\rangle | x \text{ から } y \text{ への } R\text{-鎖が存在する}\}$$

と定義する．非反射的な R についても同様にして R^* が定義される．▨

R^* は R をあたかも $\in$-関係とみたときの $\mathrm{Fld}(R)$ の推移的閉包にほかならない．すなわち次の事実が成り立つ：

補題 5.1.7　R が２項関係のとき

（ｉ）　$R\subseteq R^*\wedge \mathrm{Fld}(R^*)=\mathrm{Fld}(R)$.

（ii）　R^* は推移的関係である．

（iii）　R^* は(i), (ii)をみたす最小の関係である．

証明　（ｉ）　$\langle x, y\rangle\in R$ なら定義によって $\langle x, y\rangle\in R^*$．次に $x\in \mathrm{Fld}(R^*)$ とせよ．よって $\langle x, y\rangle\in R^*$ または $\langle y, x\rangle\in R^*$ なる y がある．$y=x$ なら R^* の定義により $\langle x, y\rangle\in R$，したがって $x\in \mathrm{Fld}(R)$．そうでなければ

$$h_0=x,\quad h_n=y,\quad \forall i<n[h_i\in \mathrm{Seg}_R(h_{i+1})]\qquad (n>0)$$

なる R-鎖 h がある．したがって $x\in \mathrm{Seg}_R(h_1)$，ゆえに $x\in \mathrm{Fld}(R)$．よって $\mathrm{Fld}(R^*)\subseteq \mathrm{Fld}(R)$.

（ii）　$\langle x, y\rangle\in R^*\wedge\langle y, z\rangle\in R^*$ とする．よって

$$g_0=x,\quad g_m=y,\quad \forall i<m[g_i\in \mathrm{Seg}_R(g_{i+1})]$$
$$h_0=y,\quad h_n=z,\quad \forall i<n[h_i\in \mathrm{Seg}_R(h_{i+1})]$$

なる R-鎖 g, h が存在する．このとき $g\cup h$ は x から z への R-鎖であるから，$\langle x, z\rangle\in R^*$.

（iii）　$R\subseteq S$ かつ S は推移的であるとせよ．$R^*\subseteq S$ を証明するために任意に $\langle x, y\rangle\in R^*$ なる x, y をとる．よって(5)なる R-鎖 h がある．$n=0$ ならば $x=y$ で $\langle x, x\rangle\in R\subseteq S$．$n>0$ のとき，S の推移性を用い有限帰納法で $i<n$ なる i に対し $x=h_0\in \mathrm{Seg}_R(h_{i+1})$ なることが示される．よって $x\in \mathrm{Seg}_S(y)$．ゆえに $\langle x, y\rangle\in S$．これで $R^*\subseteq S$ が示されたから最小性がわかった．▨

問 1.　R が有基底的なるとき：

（ｉ）　R^* は有基底的である．（ii）　$x\in \mathrm{Fld}(R)$ ならば，$\mathrm{Seg}_{R^*}(x)$ は集合であって R^*-左閉である．（よって R-左閉でもある．）▨

以下で，**5.1.5** の証明の中で残しておいた $\mathrm{Dom}(F)=\mathrm{Fld}(R)$ を証明する．$\mathrm{Dom}(F)\subseteq\mathrm{Fld}(R)$ は明白であるから，$\mathrm{Dom}(F)\subsetneq\mathrm{Fld}(R)$ と仮定して矛盾を導けばよい．そこで $x_0\in\mathrm{Fld}(R)-\mathrm{Dom}(F)$ なる R^*-極小元 x_0 をとる．$\mathrm{Fld}(R^*)=\mathrm{Fld}(R)$ に注意する．$x\in\mathrm{Seg}_{R^*}(x_0)$ なら x_0 の極小性により $x\in\mathrm{Dom}(F)$ でなければならない．よって $\mathrm{Seg}_{R^*}(x_0)\cup\{x_0\}\subseteq\mathrm{Dom}(F)$（したがってもちろん $\mathrm{Seg}_R(x)\subseteq\mathrm{Dom}(F)$）．そこで

$$f=(F\restriction\mathrm{Seg}_{R^*}(x_0))\cup\{\langle x_0,\ G`\langle x,\ F\restriction\mathrm{Seg}_R(x_0)\rangle\rangle\}$$

をつくる．$\mathrm{Seg}_{R^*}(x_0)$ は集合であるから，f も集合である．このとき

$$(6)\qquad f\in T$$

が成り立つ．ゆえに $x_0\in\mathrm{Dom}(f)\subseteq\mathrm{Dom}(F)$．これは x_0 の選び方に反する．

以下は(6)の証明：$\mathrm{Func}(f)$ は明白．$\mathrm{Dom}(f)=\mathrm{Seg}_{R^*}(x_0)\cup\{x_0\}$ であるから，これは R^*-左閉，したがって R-左閉である．そこで $x\in\mathrm{Dom}(f)$ なる任意の x をとる．$x\in\mathrm{Seg}_{R^*}(x_0)$ の場合，$x\in\mathrm{Dom}(F)$ だから $x\in\mathrm{Dom}(g)$ なる T のある元 g に対し

$$(7)\qquad f`x=(F\restriction\mathrm{Seg}_{R^*}(x_0))`x=F`x=g`x=G`\langle x,\ g\restriction\mathrm{Seg}_R(x)\rangle.$$

いま，任意の $y\in\mathrm{Seg}_R(x)$ をとる．$\mathrm{Dom}(g)$ は R-左閉であるから $y\in\mathrm{Dom}(g)$．一方 R^* の推移性から $y\in\mathrm{Seg}_{R^*}(x_0)$．よって $y\in\mathrm{Dom}(f)$．ゆえに上のようにして $y\in\mathrm{Dom}(g')$ なるある $g'\in T$ に対し $f`y=g'`y$．$g,g'\in T$，$y\in\mathrm{Dom}(g)\cap\mathrm{Dom}(g')$ であるから **5.1.4** により $g`y=g'`y$．したがって $f`y=g`y$．かくて $f\restriction\mathrm{Seg}_R(x)=g\restriction\mathrm{Seg}_R(x)$．これより(7)から

$$(8)\qquad f`x=G`\langle x,\ f\restriction\mathrm{Seg}_R(x)\rangle.$$

また $x=x_0$ の場合は，$f`x_0=G`\langle x,\ F\restriction\mathrm{Seg}_R(x_0)\rangle$．$f$ の定義から

$$F\restriction\mathrm{Seg}_R(x_0)=(F\restriction\mathrm{Seg}_{R^*}(x_0))\restriction\mathrm{Seg}_R(x_0)=f\restriction\mathrm{Seg}_R(x_0)$$

である．よって

$$(9)\qquad f`x_0=G`\langle x,\ f\restriction\mathrm{Seg}_R(x_0)\rangle.$$

(8)と(9)から

$$\forall x\in\mathrm{Dom}(f)[f`x=G`\langle x,\ f\restriction\mathrm{Seg}_R(x)\rangle]$$

が従う．よって $f\in T$ であり，(6)が示された．これで **5.1.5** の証明が完結した．▨

定理 3.6.11 の証明　**5.1.5** により所要の条件をみたすクラス関数 F の存在が示されている．一意性は R に関する帰納法(**3.6.9** (ii))によって証明される．▨

以上で準備ができたので，モストウスキーの同型定理を証明しよう．

定理 5.1.3 の証明　同型写像

$$F\colon A \longrightarrow M \qquad (M\text{ は未定})$$

を次のように定義する．いま，G を

$$\langle u, v\rangle \in G \equiv v = u``\mathrm{Dom}(u)$$

によって定義すると，G はクラス関数であり R が有基底的であるから **3.6.11** によって

$$F`x = G`\langle x, F\restriction \mathrm{Seg}_R(x)\rangle$$

なる A 上のクラス関数 F がただ一とおりに定まる．右辺を計算することにより

(10)　$$F`x = \{F`y \mid y \in \mathrm{Seg}_R(x)\}$$

であることがわかる．

$$M = \mathrm{Rng}(F) = F``A$$

とする． このとき $F\colon A \longrightarrow M$ と M は所要のものである． これを証明するためにまず，

1°）　単射性：$x, y \in A$，$F`x = F`y$ とする． R に関する帰納法原理によるため帰納法の仮定として

(11)　$$\forall t \in \mathrm{Seg}_R(x)\,\forall s \in A[F`s = F`t \rightarrow s = t]$$

を仮定する．R は外延的なるゆえ $\forall t[t \in \mathrm{Seg}_R(x) \leftrightarrow t \in \mathrm{Seg}_R(y)]$ がいえれば $x = y$ が従う．そこで $t \in \mathrm{Seg}_R(x)$ とせよ．(10)によって $F`t \in F`x = F`y$．再び (10) により $s \in \mathrm{Seg}_R(y) \wedge F`t = F`s$ なる s がある．$t \in \mathrm{Seg}_R(x)$ なるゆえ(11)により $s = t$，したがって $t \in \mathrm{Seg}_R(y)$．逆も同様．

2°）　順序保存性：(10) から $y \in \mathrm{Seg}_R(x) \rightarrow F`y \in F`x$．逆に $F`y \in F`x$ なら，$t \in \mathrm{Seg}_R(x) \wedge F`y = F`t$ なる t がある． よって 1°)から $y = t$，したがって $y \in \mathrm{Seg}_R(x)$．ゆえに $y \in \mathrm{Seg}_R(x) \leftrightarrow F`y \in F`x$．

3°）　M の推移性：$z \in F`x \in M$ $(x \in A)$ とせよ．2°) によって $z = F`y$，$y \in \mathrm{Seg}_R(x)$ なる y がある．よって $z \in M$．ゆえに $\mathrm{Trans}(M)$．

4°）　F の(したがって M の)一意性：$F'\colon A \longrightarrow \mathrm{Rng}(F')$ なる任意の同型写像 F' をとる．R についての帰納法原理によって $F = F'$，したがって $M = \mathrm{Rng}(F')$．

5°）　A が集合ならば $M = F``A$ は置換公理により集合である．

以上で F と $M = \mathrm{Rng}(F)$ が所要のものであることが証明された．▨

モストウスキーの同型定理は， 構造 $\langle u, \in\rangle$ の場合によく用いられる． $\in$ は有基底的であるから定理が適用でき，$\langle u, \in\rangle \overset{f}{\cong} \langle v, \in\rangle$ なる推移的集合 v と

同型写像 f とがある．このとき v は u の**推移的つぶし**であるといい，f を**つぶし同型写像**という．

補題 5.1.8 $f: \langle u, \epsilon\rangle \longrightarrow \langle v, \epsilon\rangle$ をつぶし同型写像とする．w が u の推移的部分集合ならば，$f\upharpoonright w$ は恒等写像である．

証明 **5.1.3** の証明(中の(10))により，$x \in u$ に対し

(12) $$f`x=\{f`y|\langle y, x\rangle \in (\epsilon|u)\}=\{f`y|y \in x \wedge y \in u\}.$$

そこで $w \subseteq u \wedge \mathrm{Trans}(w)$ としよう．w における ϵ-帰納法によって

$$f`x=x \qquad (x \in w)$$

を示すために，帰納法の仮定として

$$\forall y[\langle y, x\rangle \in (\epsilon|w) \rightarrow f`y=y]$$

を仮定する．$\mathrm{Trans}(w)$ によってこれは

$$\forall y(y \in x \rightarrow f`y=y)$$

と同値である．したがって(12)により $f`x=\{y|y \in x\}=x$. ゆえに $\forall x \in w(f`x=x)$. ▨

5.2 レヴィ階層

本節では，集合論言語 $\mathcal{L}$ の論理式に対し階層概念を定義する．これは論理式の複雑さの，ひいては集合の複雑さのバロメータである．$\mathcal{L}$ の論理式 φ が**有界**であるとは φ に現われるすべての限定作用素が有界であることである．ここで，$\forall x(x \in y \rightarrow \cdots)$，$\exists x(x \in y \wedge \cdots)$ という形をもつ限定作用素 $\forall x$，$\exists x$ を**有界**であるといい，それぞれ $\forall x \in y(\cdots)$，$\exists x \in y(\cdots)$ と略記する．このような記法は既に用いてきたところである．

定義 5.2.1 $n=0, 1, 2, \cdots$ に対し論理式の集合 Σ_n, Π_n を次のように帰納的に定義する：

1) 有界論理式全体を Σ_0，かつ Π_0 で表わす．Δ_0 で表わすことも多い．

2) Π_n に属するある論理式 ψ に対し，$\varphi \equiv \exists x\psi$ なる形をもつ論理式 φ 全体を Σ_{n+1} で表わす．

3) Σ_n に属するある論理式 ψ に対し，$\varphi \equiv \forall x\psi$ なる形をもつ論理式 φ 全体を Π_{n+1} で表わす．

4) $\Sigma_n(\Pi_n, \Delta_0)$ に属する論理式を Σ_n-(Π_n-, Δ_0-) 論理式という．

定義 5.2.2 以下では，Ω は少なくとも ZF$-\{$(VII), (VII$'$)$\}$ 程度の公理を

含んでいる閉論理式の集合とする[†]. $\mathcal{L}$ の論理式 φ に対し Σ_n-論理式 ψ が存在して

$$\Omega \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

が成り立つならば（すなわち $\varphi \leftrightarrow \psi$ が Ω の論理式を公理として証明可能ならば), φ は Σ_n^Ω である，または Σ_n^Ω-論理式であるという. Π_n^Ω についても同様である. φ が Σ_n^Ω かつ Π_n^Ω であるとき，φ は Δ_n^Ω であるという. $\Sigma_0^\Omega(=\Pi_0^\Omega)$ の代わりに Δ_0^Ω を用いる. ▨

Ω としては ZF や ZFC を考えることが多い. 定義から直ちに Σ_n-論理式は Σ_n^Ω-論理式である. Π_n についても同様.

定義 5.2.3　クラス $A=\{x|\varphi(x)\}$ に対し

$$\exists y[y=A] \quad (\text{ただし，} y \text{ は } \varphi(x) \text{ に現われない変数})$$

が証明されるならば，すなわち A が集合ならば，A は φ **により定義された**集合であるという. φ がパラメタ $a_1, \cdots, a_n$ を含むときは $a_1, \cdots, a_n$ から定義された集合という. 総称して**定義可能集合**という.

定義可能集合 A は論理式 $y=A$ が Σ_n^Ω $(\Pi_n^\Omega, \Delta_n^\Omega)$ であるとき，$\Sigma_n^\Omega(\Pi_n^\Omega, \Delta_n^\Omega)$ である，または簡単に A は Σ_n^Ω-集合(etc.)であるという. ▨

例 1.　$\{x|x\in u \wedge \varphi(x)\}$ は定義可能集合である. $\{a, b\}$ はパラメタ a, b から定義可能な集合である. また $F(a_1, \cdots, a_n)$ が演算子でしかもそれ自身関数になっていれば，$F(a_1, \cdots, a_n)`u$ はパラメタ $a_1, \cdots, a_n, u$ から定義された集合である. ▨

定義 5.2.4　$\mathcal{L}$ の論理式や定義可能集合の Σ_n^Ω, Π_n^Ω, Δ_n^Ω への分類を**レヴィ階層**という. ▨

補題 5.2.5　次の論理式と定義可能集合は Δ_0^Ω である：

1）$x\subseteq y$,　2）ϕ,　3）$\{a, b\}$,　4）$\langle a, b\rangle$.

証明　次の同値式が Γ において証明されることから従う：

1）$x\subseteq y \leftrightarrow \forall z\in x[z\in y]$.

2）$x=\phi \leftrightarrow \forall z\in x[z\notin x]$.

3）$x=\{a, b\} \leftrightarrow \forall z\in x[z=a \vee z=b]\wedge a\in x \wedge b\in x$.

4）$x=\langle a, b\rangle \leftrightarrow \exists y\in x \exists z\in x[y=\{a, a\}\wedge z=\{a, b\}\wedge x=\{y, z\}]$. ▨

補題 5.2.6　1）$m<n$ なら Σ_m^Ω-論理式(集合), Π_m^Ω-論理式(集合)は Δ_n^Ω

---

† Ω はもう少し狭くてもよい. むしろ議論の展開に必要な程度の公理の集合としておく方がよい.

である.

2) φが Σ_m^Ω なら $\neg\varphi$ は Π_m^Ω である.

3) φが Π_m^Ω なら $\neg\varphi$ は Σ_m^Ω である. ▨

問 1. 5.2.6 を証明せよ. ▨

次の補題の類似物は帰納的関数理論においてよく知られた事実であるが, レヴィ階層でも成り立つ:

補題 5.2.7 1) φが Σ_n^Ω なら $\forall x\varphi$ は Π_{n+1}^Ω であり, $n>0$ のとき $\exists x\varphi$ は Σ_n^Ω である. φが Π_n^Ω なら $\exists x\varphi$ は Σ_{n+1}^Ω であり, $n>0$ なら $\forall x\varphi$ は Π_n^Ω である.

2) Σ_n^Ω-論理式たち, Π_n^Ω-論理式たちはどちらも $\vee$, $\wedge$ の下で閉じている.

3) φが Σ_n^Ω, ψ が Π_n^Ω なら, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\wedge\psi$ は Δ_{n+1}^Ω で, $\varphi\to\psi$ は Π_n^Ω, $\psi\to\varphi$ は Σ_n^Ω である.

4) どの論理式もあるnに対し Δ_n^Ω である.

証明 1) $\varphi\leftrightarrow\exists y\psi$, ψ は Π_{n-1}^Ω とする. $\forall x\varphi\leftrightarrow\forall x\exists y\psi$ であるから帰納法の仮定により $\forall x\varphi$ は Π_{n+1}^Ω である. 次に $n>0$ とする. $\exists x\varphi\leftrightarrow\exists x\exists y\psi$ $\leftrightarrow\exists u\exists x\in u\exists y\in u[u=\{x, y\}\wedge\psi]$ である. ただしuはψに現われない変数である. いま,

$$\psi\leftrightarrow\forall x_1\exists x_2\cdots Qx_{n-1}\theta \qquad (\theta \text{ は } \Delta_0^\Omega)$$

とする. ただし Q は $\exists$ (nが奇数のとき), または $\forall$ (nが偶数のとき)を表わす. このとき

$$\begin{aligned}&\exists u\exists x\in u\exists y\in u[u=\{x, y\}\wedge\psi]\\ &\leftrightarrow\exists u\forall x_1\exists x_2\cdots Qx_{n-1}\exists x\in u\exists y\in u(u=\{x, y\}\wedge\theta).\end{aligned}$$

$u=\{x, y\}$ は Δ_0^Ω であるから, 右辺の論理式は Σ_n^Ω である. Π_n^Ω については, いまの結果と **5.2.6** から否定を用いて証明できる.

2) φ_0, ψ_0 を Δ_0^Ω とし

$$\varphi\leftrightarrow\exists x_1\forall x_2\cdots Qx_n\varphi_0, \qquad \psi\leftrightarrow\exists y_1\forall y_2\cdots Qy_n\psi_0$$

とする. ただし, x_1, $\cdots$, x_n, y_1, $\cdots$, y_n は異なる変数である. このとき

$$\varphi\begin{smallmatrix}\vee\\ \wedge\end{smallmatrix}\psi\leftrightarrow\exists x_1\exists y_1\forall x_2\forall y_2\cdots Qx_nQy_n[\varphi_0\begin{smallmatrix}\vee\\ \wedge\end{smallmatrix}\psi_0]$$

が成り立つ. ここで1)の手法を繰り返し適用すると

$$\varphi\begin{smallmatrix}\vee\\ \wedge\end{smallmatrix}\psi\leftrightarrow\exists z_1\forall z_2\cdots Qz_n\theta_0, \qquad \theta_0 \text{ は } \Delta_0^\Omega$$

という形にすることができる. よって $\varphi\begin{smallmatrix}\vee\\ \wedge\end{smallmatrix}\psi$ は Σ_n^Ω である. Π_n^Ω についても

同様である．

3) φ が Σ_n^Ω, ψ が Π_n^Ω なら，これらは Δ_{n+1}^Ω である．よって 2)から $\varphi \genfrac{}{}{0pt}{}{\vee}{\wedge} \psi$ は Δ_{n+1}^Ω である．後半は $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ を用いればよい．

4) $\mathcal{L}$ の論理式 φ に対しある冠頭形論理式 ψ が存在して，述語論理において $\varphi \leftrightarrow \psi$ が成り立つようにできる．ここで ψ が**冠頭形**論理式であるとは ψ が $Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_n\theta$ という形をもつときにいう．ただし Q_1, Q_2, $\cdots$, Q_n は限定作用素を表わし，θ は限定作用素を一つも含まない論理式である．さて同一の限定作用素の重なり $\exists x_1 \cdots \exists x_k$, $\forall x_1 \cdots \forall x_k$ は 2) の技法を繰り返し適用することによって，1 個の $\exists x$ または $\forall x$ に直す（$\leftrightarrow$ の意味で）ことができる．かくて

$$\varphi \leftrightarrow \exists x_1 \forall x_2 \cdots Qx_n\theta_0 \qquad \text{または} \qquad \varphi \leftrightarrow \forall x_1 \exists x_2 \cdots Qx_n\theta_0$$

ならしめうる．ここに θ_0 は Δ_0^Ω である．▨

次の補題は，有界限定作用素のもつ重要な性質を述べている．

補題 5.2.8 φ が $\Sigma_n^{ZF}(\Pi_n^{ZF})$ ならば†, $\exists x \in y\varphi$ および $\forall x \in y\varphi$ は $\Sigma_n^{ZF}(\Pi_n^{ZF})$ である．すなわち有界限定作用素は，レヴィ階層の階級を変えない．

証明 φ を Σ_n^{ZF} とする．$\exists x \in y\varphi$ が Σ_n^{ZF} であることは前補題の証明中の技法によって容易にわかる．そこで $\psi = \forall x \in y\varphi$ が Σ_n^{ZF} であることを示そう．$n=0$ のときは定義によって ψ は Δ_0^{ZF} である．$n>0$ の場合．$n-1$ に対し補題が成立するとし $\varphi \leftrightarrow \exists z\theta(x, z)$ (θ は Π_{n-1}^{ZF}) という場合を考える．このとき

$$(2) \qquad \forall x \in y \exists z\theta(x, z) \leftrightarrow \exists u \forall x \in y \exists z \in u\theta(x, z)$$

が成り立つ．ここに u は θ に現われない変数である．(2)を証明するために，まず $x \in y$ なる任意の x をとる．$\theta(x, z)$ なる z があれば

$$f`x = \{z \mid \theta(x, z) \wedge \forall t[\theta(x, t) \to \rho(z) \le \rho(t)]\}$$

とし（右辺はある V_α に含まれるから確かに集合である），かかる z がなければ

$$f`x = \phi$$

とする．置換公理により（**2.9.11** をみよ）$u = f``y$ は集合である．これに対し

$$\forall x \in y[\exists z\theta(x, z) \to \exists z \in u\theta(x, z)]$$

であるから

$$\forall x \in y \exists z\theta(x, z) \to \exists u \forall x \in y \exists z \in u\theta(x, z).$$

よって(2)の $\to$ が示された．逆方向 $\leftarrow$ は明白である．ゆえに(2)が成り立つことがわかった．そこで(2)の右辺を評価しよう．θ は Π_{n-1}^{ZF} であるから帰納法

† すなわち，$\Omega = ZF$ の場合である．

の仮定により $\forall x \in y \exists z \in u\theta(x, z)$ は Π^{ZF}_{n-1} である．よって右辺は Σ^{ZF}_n である．Π^{ZF}_n についても同様である．▨

問 2． 上の証明中の Π^{ZF}_n の場合を証明せよ．

問 3． $\{x|\varphi(x)\}$ が集合で，$\varphi(x)$ が Δ^{ZF}_n なら $\{x|\varphi(x)\}$ は Π^{ZF}_n である．ただし $n \geq 1$ とする．

問 4． $\varphi(x)$ が Δ^{ZF}_n なら集合 $\{x \in z|\varphi(x)\}$ は Δ^{ZF}_n である．ただし $n \geq 1$ とする．▨

例 2． Trans(x), Conn(x), Ord(x), $x<y$ は Δ^{ZF}_0 である．これらは次の定義式から直ちにわかる．したがって特に Δ_0 である．

$$\mathrm{Trans}(x) \leftrightarrow \forall y \in x \forall z \in y[z \in x]$$

$$\mathrm{Conn}(x) \leftrightarrow \forall y \in x \forall z \in x[y \in z \vee y=z \vee z \in y]$$

$$\mathrm{Ord}(x) \leftrightarrow \mathrm{Trans}(x) \wedge \mathrm{Conn}(x)$$

$$x<y \leftrightarrow \mathrm{Ord}(x) \wedge \mathrm{Ord}(y) \wedge x \in y.$$ ▨

例 3． 集合 1 は Δ^{ZF}_0 である．なぜなら

$$x=1 \leftrightarrow x=\{\phi\} \leftrightarrow x \neq \phi \wedge \forall t \in x(t=\phi).$$ ▨

以下に，いくつかの有用な論理式や集合のレヴィ階層の階級を問の形で述べておく．

問 5． 1) $x=y+1$, Suc(x), Lim(x) は Δ^{ZF}_0 である．

2) 集合 2, ω は Δ^{ZF}_0 である．

3) $\bigcup x$, $\bigcup\bigcup x$, $x \times y$ は Δ^{ZF}_0 である．

4) Dom(f), Rng(f), Func(f) は Δ^{ZF}_0 である．

5) $f`x$, $f``x$, $f \upharpoonright x$ は Δ^{ZF}_0 である．

6) TC(x) は Δ^{ZF}_1 である．

7) $n \in \omega$ ならば，n は Δ^{ZF}_0 である．▨

5.3 絶対性の概念

ある概念を ZF(C) の $\in$-モデル $\mathcal{M}=\langle M, \in \rangle$（$M$ は一般にクラス）において取り扱う際，それが集合論の宇宙で考えても M で考えても変わらないものであるかどうかということが，非常に重要な観点となることが多い．例えば，集合 x がモデル M の要素であるとき，“x は順序数である”ということが全宇宙 V で考えてもモデル M に限定して考えても不変か？ すなわち $x \in M$ について

（1）　$\mathrm{Ord}(x) \leftrightarrow \mathcal{M} \models \mathrm{Ord}(x)$

が成立するか？ というような問題である．もし(1)が成立するなら，Ord(x)

は(すなわち“順序数である”という概念は) $\mathcal{M}$ に関し**絶対的**であるという．この場合には，x ($\in M$) が順序数であることとモデル M の中で順序数であることとが同値であるから，順序数という概念はモデルの中で考えても全宇宙で考えても同じであり大変便利である．(1)が成立しないなら，モデルの中では順序数であっても外の世界では順序数とは限らないことがあるわけで取り扱いに注意を要する．後に示されるように M が推移的ならば $\mathrm{Ord}(x)$ は $\mathcal{M}$ に関し絶対的であることがわかる．しかし $\mathrm{Card}(x)$ はそうでない．モデル $\mathcal{M}$ の中で“x は基数である”という概念は一般にモデル $\mathcal{M}$ の外では変わってしまうのである．

定義 5.3.1 2つの構造 $\mathcal{A}=\langle A, \in\rangle$, $\mathcal{B}=\langle B, \in\rangle$ が与えられていて $A\subseteq B$ であるとする(このとき $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ とかく)．また $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ は $x_1, \cdots, x_n$ のみを自由変数としてもつ論理式とする．もし $a_1, \cdots, a_n \in A$ なる $a_1, \cdots, a_n$ に対し常に

$$\mathcal{A}\models\varphi(a_1, \cdots, a_n) \leftrightarrow \mathcal{B}\models\varphi(a_1, \cdots, a_n)$$

が成り立てば，φ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ **に関し絶対的である**という．特に $\mathcal{B}$ が全宇宙 $\langle V, \in\rangle$ の場合には，φ は $\mathcal{A}$ **に関し絶対的**であるという．定義可能集合 T が**絶対的**とは，論理式 $y=T$ が絶対的であることと定める．ただし，y は T の定義に現われない変数である．▨

定義から直ちに，φ, ψ が $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ (ただし $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$) に関し絶対的なら，$\neg\varphi$, $\varphi\vee\psi$, $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\to\psi$ もそうであることがわかる．

定義 5.3.2 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ が $x, x_1, \cdots, x_n$ のみを自由変数にもつ論理式で，$\mathcal{A}=\langle A, \in\rangle$ が構造であるとき，$F: A^n \longrightarrow A$ が $\mathcal{A}$ **における** φ **のスコーレム関数**であるとは

$\forall a_1, \cdots, a_n \in A[\exists a \in A[\mathcal{A}\models\varphi(a, a_1, \cdots, a_n)] \to \mathcal{A}\models\varphi(F`\langle a_1, \cdots, a_n\rangle, a_1, \cdots, a_n)]$ が成り立つときにいう．▨

定理 5.3.3 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ は $x, x_1, \cdots, x_n$ のみを自由変数にもつ論理式で，$\mathcal{A}=\langle A, \in\rangle$, $\mathcal{B}=\langle B, \in\rangle$ は $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ なる2つの構造とし，φ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ で関し絶対的であるとする．更に $F: B^n \longrightarrow B$ は $\mathcal{B}$ における φ のスコーレム関数とする．もし A が F に関し閉じていれば(すなわち $a_1, \cdots, a_n \in A \to F`\langle a_1, \cdots, a_n\rangle \in A$ ならば)，論理式 $\exists x\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関し絶対的である．

証明 $a_1, \cdots, a_n \in A$, $\mathcal{A}\models\exists x\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)$ とせよ．よってある $a\in A$ に対し $\mathcal{A}\models\varphi(a, a_1, \cdots, a_n)$ である．φ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関し絶対的であるから，

$\mathcal{B}\models\varphi(a, a_1, \cdots, a_n)$，したがって $\mathcal{B}\models \exists x\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)$．逆にこのことが成り立つとしよう．ただし $a_1, \cdots, a_n\in A$ とする．スコーレム関数の定義から

$$\mathcal{B} \models \varphi(F`\langle a_1, \cdots, a_n\rangle, a_1, \cdots, a_n).$$

仮定により $F`\langle a_1, \cdots, a_n\rangle\in A$ なるゆえ $\varphi$ の絶対性から $\mathcal{A}\models\varphi(F`\langle a_1, \cdots, a_n\rangle, a_1, \cdots, a_n)$，したがって $\mathcal{A}\models \exists x\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)$． ▒

さて次に述べる定理は有界限定作用素の有用な性質を与える結果であり，これによって Δ_1^{ZF}–論理式の絶対性が導かれる． $\in$–構造 $\mathcal{A}=\langle A, \in\rangle$ は A が推移的クラスならば**推移的構造**であるといわれる．

定理 5.3.4 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は構造で $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ かつ $\mathcal{A}$ は推移的であるとし，$\varphi(x)$ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関し絶対的であるとする．このとき $\exists x\in y\varphi(x)$ および $\forall x\in y\varphi(x)$ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関し絶対的である．

証明 $a, a_1, \cdots, a_n\in A$ とする．$A\subseteq B$ であるから $\mathcal{A}\models \exists x\in a\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)$ ならば $\mathcal{B}\models \exists x\in a\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)$ であることは当然である．そこで逆を示すために $\mathcal{B}\models \exists x\in a\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)$ としよう．よってある $b\in B$ に対し

$$\mathcal{B} \models b\in a\wedge\varphi(b, a_1, \cdots, a_n).$$

$b\in a\in A$ と $\mathrm{Trans}(A)$ から $b\in A$. したがって $\mathcal{A}\models \exists x\in a\varphi(x, a_1, \cdots, a_n)$. ゆえに $\exists x\in y\varphi(x)$ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関し絶対的である．次に $\forall x\in y\varphi(x)$ の絶対性：φ が絶対的だから $\neg\varphi$ は絶対的，よって，いま証明したことから $\exists x\neg\varphi(x)$ は絶対的．したがってまた $\neg\exists x\neg\varphi(x)$ は絶対的．すなわち $\forall x\varphi(x)$ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関し絶対的である． ▒

限定作用素を含まない論理式は任意の $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$) に関し絶対的である．したがって上の定理により，$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ が Ω の推移的モデルで $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ ならば，任意の Δ_0^{Ω}–論理式(集合)は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関し絶対的であることがわかる．しかしこの事実はもう少し拡張できる：

定理 5.3.5 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は Ω の推移的モデルで $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ とする．このとき，すべての Δ_1^{Ω}–論理式(集合)は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関し絶対的である．

証明 φを Δ_1^{Ω}–論理式とする．よって

(2) $\Omega\vdash\varphi(x_1, \cdots, x_n)\leftrightarrow \exists x\psi_1(x, x_1, \cdots, x_n)\leftrightarrow\forall x\psi_2(x, x_1, \cdots, x_n)$

なる Δ_0–論理式 ψ_1, ψ_2 がある．任意に $a_1, \cdots, a_n\in A$ をとり

$$\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$$

と仮定せよ．よって(2)によりある $a\in A$ に対し $\mathcal{A}\models\psi_1(a, a_1, \cdots, a_n)$. した

がって(ψ_1 の絶対性により) $\mathcal{B}\models\psi_1(a, a_1, \cdots, a_n)$. ゆえに $\mathcal{B}\models\exists x\psi_1(x, a_1, \cdots, a_n)$, すなわち $\mathcal{B}\models\varphi(a_1, \cdots, a_n)$. 逆にこれが成り立てば(2)によって任意の $a\in A$ に対し $\mathcal{B}\models\psi_2(a, a_1, \cdots, a_n)$. したがって($\psi_2$ の絶対性により) $\mathcal{A}\models\psi_2(a, a_1, \cdots, a_n)$. a は A の任意の要素であるから

$$\mathcal{A}\models\forall x\psi_2(x, a_1, \cdots, a_n), \qquad \text{i.e.} \qquad \mathcal{A}\models\varphi(a_1, \cdots, a_n) \qquad \text{(by (2))}$$

ゆえに Δ_1^Ω-論理式 φ は $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関し絶対的である. Δ_1^Ω-集合についても同様である. ▨

系 5.3.6 $\mathcal{A}$ が Ω の推移的モデルならば, Δ_1^Ω-論理式(集合)は $\mathcal{A}$ に関し絶対的である. すなわち Δ_1^Ω-論理式 φ について, $a_1, \cdots, a_n\in A$ なら

$$\varphi^A(a_1, \cdots, a_n) \leftrightarrow \varphi(a_1, \cdots, a_n) \quad ▨$$

φ が Ω の任意の推移的モデルに関し絶対的ならば, φ は Ω-モデルに関し絶対的であるという. あるいは簡単に Ω-絶対的であるという. この用語を用いると **5.3.6** は次のように述べられる:

定理 5.3.7 Δ_1^Ω-論理式は Ω-絶対的である. ▨

集合についても同様である.

前節で, いろいろな論理式や集合が Δ_0^{ZF}, Δ_1^{ZF} であることを知った. よってそれらはすべて ZF-絶対的である. また Δ_0-論理式(集合)は任意の推移的構造に関し絶対的である. 論理式が任意の推移的構造に関し絶対的なるとき, それは絶対的であると呼ぶことにすれば, Δ_0-論理式や Δ_1-論理式は絶対的である. また $\Omega=(\mathrm{I})+(\mathrm{V})+(\mathrm{VIII})$ であれば(次節の **5.4.1** により) Δ_1^Ω-論理式は絶対的である. 集合についても同様である.

例 $\mathcal{A}$ を推移的構造とする. 論理式 $x\subseteq y$ は $\mathcal{A}$ に関し絶対的である. なぜなら, $x, y\in A$ のとき

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\models x\subseteq y &\leftrightarrow \mathcal{A}\models\forall t(t\in x\to t\in y) \\ &\leftrightarrow \forall t\in A(t\in x\to t\in y) \\ &\leftrightarrow \forall t(t\in x\to t\in y). \end{aligned}$$

第3の $\leftrightarrow$ は, $t\in x$ ならば $t\in A$ であることによる. この証明では A が推移的であることしか使われていない. ▨

5.4 ZFC のモデル

本節では, $\in$-構造が ZFC の諸公理を満たすための条件を調べる.

定理 5.4.1 $\mathcal{A}=\langle A, \in\rangle$ は推移的 $\in$-構造とする. このとき

(i) $\mathcal{A}$ は外延性公理(I)，空集合公理(V)，正則性公理(VIII)のモデルである：$\mathcal{A}\models$(I)$\wedge$(V)$\wedge$(VIII).

(ii) $\forall x,y\in A[\{x,y\}\in A]$ ならば $\mathcal{A}\models$ 対公理(II)，逆も成り立つ.

(iii) $\forall x\in A[\bigcup x\in A]$ ならば $\mathcal{A}\models$ 和集合公理(III)，逆も成り立つ.

(iv) $\forall x\in A[A\cap\mathcal{P}(x)\in A]$ ならば $\mathcal{A}\models$ 巾集合公理(IV)，逆も成り立つ.

(v) $\omega\in A$ ならば $\mathcal{A}\models$ 無限公理(VI).

(vi) $\forall x\in A\forall y[(y$ は A で定義可能なクラス$)\wedge y\subseteq x\rightarrow y\in A]$†,†† ならば $\mathcal{A}\models$ 分出公理(VII′).

(vii) $\forall x\in A\forall f[(f$ は A で定義可能なクラス$)\wedge(f:x\longrightarrow A)\rightarrow \mathrm{Rng}(f)\in A]$ ならば $\mathcal{A}\models$ 置換公理(VII).

(viii) $\bigcup\{\mathcal{P}(\bigcup x)\,|\,x\in A\}\subseteq A$ ならば $\mathcal{A}\models$ 選択公理(IX).

証明 (i) (a) 外延性公理. $x,\ y\in A$ とする. 宇宙 V における外延性公理によって $x=y\rightarrow\forall z\in A(z\in x\leftrightarrow z\in y)$ は明白. 逆を示すために $\forall z\in A(z\in x\leftrightarrow z\in y)$ を仮定する. $\mathrm{Trans}(A)$ であるから $z\in x$ なら $z\in A$ であり，したがって $z\in y$. $z\in y$ としても同様にして $z\in x$. ゆえに $\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)$ が成り立つ. したがって V における公理(I)により $x=y$. かくて $x=y\leftrightarrow\forall z\in A(z\in x\leftrightarrow z\in y)$. (b) 空集合公理. $A\neq\phi$ だから **3.6.3** により A は $\in$-極小元 a をもつ. A の推移性により $a=\phi$ でなければならない. ゆえに $\phi\in A$. これは $\mathcal{A}\models\exists x\forall y(y\notin x)$ を意味する. (c) 正則性公理. $a\in A,\ a\neq\phi$ とする. V における公理(VIII)により $x\in a\wedge x\cap a=\phi$ なる x がある. すなわち

$$x\in a\wedge\forall t(t\in a\rightarrow t\notin x).$$

$\mathrm{Trans}(A)$ より，これは $x\in A\wedge x\in a\wedge\forall t\in A(t\in a\rightarrow t\notin x)$ と同値. これは $\mathcal{A}\models$(VIII) を意味する.

(ii) $x,\ y\in A$ とする. よって $\forall t(t\in z\leftrightarrow t=x\vee t=y)$ なる集合 z が存在する. 条件を仮定すると $\{x,y\}\in A$ であるから $z\in A$ である. もちろん $\forall t\in A(t\in z\leftrightarrow t=x\vee t=y)$ であるから，$\mathcal{A}\models\exists z\forall t(t\in z\leftrightarrow t=x\vee t=y)$. したがって $\mathcal{A}\models$(II). 順方向の矢印を示すために $\mathcal{A}\models$(II) とする. よって $x,\ y\in A$ に対し $\forall t\in A(t\in z\leftrightarrow t=x\vee t=y)$ なる $z\in A$ がある. $\mathrm{Trans}(A)$ より $\forall t(t\in z\leftrightarrow t=x\vee t=y)$ がいえるから $z=\{x,y\}$. ゆえに $\{x,y\}\in A$.

---

† この条件が成り立つとき A は**弱超推移的**であるという.

†† $\mathcal{L}$ の論理式 $\varphi(x,x_1,\cdots,x_n)$ と $a_1,\cdots,a_n\in A$ とに対し，$\{x\in A\,|\,\langle A,\in\rangle\models\varphi(x,a_1,\cdots,a_n)\}$ を **A で定義可能なクラス**という. それは“宇宙 A”で考えたクラスである. 上ではこれが外からみて集合である場合を考えている.

(iii)　和集合公理：(ii)と同様.

(iv)　巾集合公理：任意の $x \in A$ をとる

$$\mathcal{A} \vDash \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x) \ \leftrightarrow \ \mathcal{P}(x) \cap A \in A$$

を証明すればよい．⊆ の絶対性を用いて

(2)　$$\forall z \in A(z \in \mathcal{P}(x) \cap A \ \leftrightarrow \ \mathcal{A} \vDash z \subseteq x)$$

が成り立つことがわかる．よって $\mathcal{P}(x) \cap A \in A$ なら $\mathcal{A} \vDash \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$ である．逆に $\mathcal{A} \vDash \forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$ なる $y \in A$ があれば，Trans(A) と(2)を用いて $y = \mathcal{P}(x) \cap A$ が示されるから $\mathcal{P}(x) \cap A \in A$ である．

(v)　無限公理．$\omega = A$ とする．ω は公理(VI)における a に対する条件

$$\phi \in \omega \wedge \forall x(x \in \omega \to x \cup \{x\} \in \omega)$$

を満たすから，Trans(A) と(iii)から $\mathcal{A} \vDash \forall x(x \in \omega \to x \cup \{x\} \in \omega)$．したがって $\mathcal{A} \vDash$ (VI).

(vi)　分出公理：$\forall x \in A \forall y$ [(y は A で定義可能なクラス) $\wedge\, y \subseteq x \to y \in A$] とする．任意に $\mathcal{L}$ の論理式 $\phi(t)$ と集合 $x \in A$ を与える．(簡単のため，$\phi(t)$ は t 以外に自由変数をもたないとする．) 宇宙 V における (VII′) によって集合 $y = \{t \in x \mid \phi^A(t)\}$ が存在する．この y は A で定義可能なクラスでかつ $y \subseteq x$ であるから仮定により $y \in A$．ゆえに $\mathcal{A} \vDash \exists y \forall t(t \in y \leftrightarrow t \in x \wedge \phi(t))$．これは $\mathcal{A} \vDash$ (VII′) を意味する．

(vii)　置換公理．$\forall x \in A \forall f$[($f$: A で定義可能) $\wedge$ (f: $x \longrightarrow A$) $\to$ Rng$(f) \in A$] とする．$\mathcal{L}$ の論理式 $\varphi(s, t)$――s, t 以外に自由変数をもたないとする――と集合 $x \in A$ を与える．そして $\mathcal{A} \vDash \forall s, t, t'[\varphi(s, t) \wedge \varphi(s, t') \to t = t']$ が成り立っているとする．いま，クラス F を

$$\langle s, t \rangle \in F \leftrightarrow (s \in A \wedge \varphi^A(s, t))$$

によって定義すれば F は A で定義可能なクラスで Func(F) である．すなわち F: $A \to A$．宇宙における公理(VII)により集合 $u = \mathrm{Rng}(F \upharpoonright x)$ が存在する．仮定により $u \in A$．よって $\mathcal{A} \vDash \exists u \forall t(t \in u \leftrightarrow \exists s \in x \varphi(s, t))$．これは $\mathcal{A} \vDash$ (VII) を意味する．

(viii)　選択公理．$\bigcup\{\mathcal{P}(\bigcup z) \mid z \in A\} \subseteq A$ と仮定し，$z \in A$, $\mathcal{A} \vDash \forall x(x \in z \to x \neq \phi) \wedge \forall x, y \in z(x \neq y \to x \cap y = \phi)$ とする．Trans(A) と $z \in A$ より

$$\forall x(x \in z \to x \neq \phi) \wedge \forall x, y \in z(x \neq y \to x \cap y = \phi)$$

が成り立つ．ゆえに宇宙 V における公理(IX)によって

$$\forall x[x \in z \to \exists t(u \cap x = \{t\})] \wedge u \subseteq \bigcup z$$

なる集合 u が存在する．仮定により $u \in A$．これと Trans(A) より

$$\mathcal{A}\models \exists u\forall x[x\in z\to \exists t(u\cap x=\{t\})].$$

ゆえに $\mathcal{A}\models$(IX). ▒

第3章において各順序数 α に対し集合 V_α (累積タイプ集合)が定義された. V_α を領域とするような構造

$$\langle V_\alpha, \in\rangle \text{ (もちろん } \langle V_\alpha, \in_{V_\alpha}\rangle \text{ の意)} \qquad (\alpha>0)$$

を**自然モデル**と呼んでいる. 以下簡単のため

$$\langle A, \in\rangle\models\varphi \quad \text{を} \quad A\models\varphi \quad \text{と略記する.}$$

定理 5.4.2 $\mathrm{Lim}(\alpha)$ で $\alpha>\omega$ ならば, $\langle V_\alpha, \in\rangle$ は ZFC マイナス(VII)のモデルである. すなわち

$$\langle V_\alpha, \in\rangle\models(\mathrm{I})\sim(\mathrm{VI}), (\mathrm{VIII}), (\mathrm{IX}).$$

証明 前定理を自由に利用する(一つ一つ引用しない). 1°) まず Trans(V_α) であるから $V_\alpha\models(\mathrm{I})\wedge(\mathrm{V})\wedge(\mathrm{VIII})$. 以下 $x, y\in V_\alpha$ とする. $\mathrm{Lim}(\alpha)$ であるから, $\beta<\alpha$, $x, y\in V_\beta$ なる β が存在する. 2°) $\{x, y\}\in\mathscr{P}(V_\beta)=V_{\beta+1}\subset V_\alpha$ なるゆえ $V_\alpha\models(\mathrm{II})$. 3°) 推移性から $z\in x\to z\in V_\beta$, したがって $\bigcup x\subseteq V_\beta$. よって $\bigcup x\in V_{\beta+1}\subseteq V_\alpha$. ゆえに $V_\alpha\models(\mathrm{III})$. 4°) $\mathscr{P}(x)\cap V_\alpha=\mathscr{P}(x)\in V_{\beta+1}\subset V_\alpha$ なるゆえ $V_\alpha\models(\mathrm{IV})$. 5°) $\omega\in V_{\omega+1}\subseteq V_\alpha$ ($\because$ $\alpha>\omega$) であるから $V_\alpha\models(\mathrm{VI})$. 6°) 任意に $z\in\mathscr{P}(\bigcup x)$ をとる. $\mathscr{P}(\bigcup x)\in V_{\beta+2}$ であるから $z\in V_{\beta+3}\subset V_\alpha$. したがって $\bigcup\{\mathscr{P}(\bigcup x)\mid x\in V_\alpha\}\subseteq V_\alpha$. よって $V_\alpha\models(\mathrm{IX})$. ▒

置換公理(VII)に関しては, 例えば

$$V_\omega\models(\mathrm{VII})$$

である. なぜなら $x\in V_\omega$, $f\colon x\longrightarrow V_\omega$ とする. $x\sim n$ なる $n\in\omega$ が存在するから $\mathrm{Rng}(f)\sim m$, $m\in\omega$ ($m\leq n$) なる自然数 m が存在する. したがって $\mathrm{Max}\{\rho(z)\mid z\in\mathrm{Rng}(f)\}=k$ とすれば $k\in\omega$. このとき $\mathrm{Rng}(f)\subseteq V_{k+1}$ であるから $\mathrm{Rng}(f)\in V_\omega$. ゆえに前定理(vii)により $V_\omega\models(\mathrm{VII})$. しかし

(3) $$V_\omega\not\models(\mathrm{VI}).$$

なぜなら, もし $V_\omega\models(\mathrm{VI})$ とすれば, $V_\omega\models\phi\in a\wedge\forall x(x\in a\to x\cup\{x\}\in a)$ なる集合 $a\in V_\omega$ が存在する. $\rho(a)<\omega$ であるから, a は最大階数の要素 b をもつ. $\rho(b)=m$ とおく. 仮定により $b\cup\{b\}\in a$. しかし $\rho(b\cup\{b\})=m+1$ であるから b の階数の最大性に反する. ゆえに $V_\omega\not\models(\mathrm{VI})$.

また $\omega\in V_{\omega+\omega}$ であるから定理によって

$$V_{\omega+\omega}\models\mathrm{ZFC}-(\mathrm{VII}).$$

実際,

(4) $$V_{\omega+\omega}\not\models(\mathrm{VII})$$

である．なぜなら：$f:\omega\longrightarrow\omega+\omega$ を $f`x=\omega+x$ $(x\in\omega)$ によって定義すると，もし $V_{\omega+\omega}\vDash$(VII) ならば，集合 $f``\omega\in V_{\omega+\omega}$ でなければならない．よって $\rho(f``\omega)<\omega+\omega$．しかし $f``\omega=\{\omega+x|x\in\omega\}$ なるゆえ $\rho(f``\omega)>\omega+x$ for all $x\in\omega$ となるから $\rho(f``\omega)\geq\omega+\omega$ でなければならない．不合理．よって $V_{\omega+\omega}$ $\nvDash$(VII)．しかし $V_{\omega+\omega}$ は**超推移的**であるから(演習問題 V, 9. 参照.)

$$V_{\omega+\omega}\vDash(\text{VII}').$$

かくてこれらのことから次の結論に達する：

定理 5.4.3 (i) 無限公理は ZFC の他の公理から導くことができない．

(ii) 置換公理は ZFC の他の公理から導くことができない．

(iii) $\langle V_{\omega+\omega},\in\rangle$ は選択公理をもつツェルメロ集合論 ZC のモデルである．

証明 (i) **5.4.2** の証明は条件 $\alpha>\omega$ を除いたとき

$$V_\alpha\vDash(\text{I})\sim(\text{V}),\ (\text{VIII}),\ (\text{IX})$$

を与える．よって $V_\omega\vDash$(I)∼(V), (VII)∼(IX), i. e. $V_\omega\vDash$ZFC−(VI)．もし ZFC−(VI) ⊢ (VI) なら，このことから $V_\omega\vDash$(VI) が生ずるから(3)に反する．

(ii)も(4)を用いて同様に，(iii)は上で証明したとおり．▨

2つの結果 **5.4.2** と **4.5.10** とによって，次の定理が得られる：

定理 5.4.4 κ が強到達不能基数ならば

$$V_\kappa\vDash\text{ZFC}.\ ▨$$

定理 5.4.5 ZFC が無矛盾であれば（すなわち ZFC ⊢ $\varphi\wedge\neg\varphi$ なる文 φ が存在しないならば），強到達不能基数の存在は ZFC では証明できない．すなわち

$$\text{ZFC}\nvdash\exists\kappa\,\text{Inac}(\kappa).$$

証明 (5) $\text{ZFC}\vdash\exists\kappa\,\text{Inac}(\kappa)$

とする．よって最小の強到達不能基数が存在するからそれを κ_0 としよう．**5.4.4** によって $V_{\kappa_0}\vDash$ZFC．ゆえに(5)から $V_{\kappa_0}\vDash\exists\kappa\,\text{Inac}(\kappa)$．よって

(6) $V_{\kappa_0}\vDash\kappa$ は強到達不能基数である

という $\kappa\in V_{\kappa_0}$ が存在する．κ は V_{κ_0} **において**順序数であるが Ord(x) は絶対的であるから κ は真の順序数，したがって

(7) $\kappa<\kappa_0.$

ところで Card(x)，基数べき 2^ν，$cf(x)$ 等はどれも V_{κ_0} に関し絶対的である(問1を参照)から，κ は真の強到達不能基数である．しかし(7)によりこのことは κ_0 が最小の強到達不能基数であることに反する．▨

問 1. $\alpha\in$ Lim ならば Card(x) は V_α に関し絶対的である．▨

なお，ゲーデルの第2不完全性定理を知っている読者は **5.4.4** からただちに **5.4.5** を導くことができるであろう．

系 5.4.6 ZFC が無矛盾ならば，ZFC$+\neg\exists\kappa\,\mathrm{Inac}(\kappa)$ は無矛盾である． ▨

なお，次章で学ぶある結果を用いると，弱到達不可能基数の存在も ZFC では証明できないことがわかる：

定理 5.4.7 ZFC が無矛盾ならば，ZFC $\nvdash$ WINAC，
ここに WINAC $\equiv$ $\exists\kappa$[κ は弱到達不可能基数である]．

証明は第6章で述べる． ▨

5.5 反映定理

定義 5.5.1 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ なる2つの $\in$-構造とする．任意の論理式が $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ に関し絶対的ならば，$\mathcal{A}$ は $\mathcal{B}$ の**初等部分構造**である，$\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ の**初等拡大構造**であるといい，

$$\mathcal{A}\prec\mathcal{B}$$

で表わす． ▨

反映定理は，有限個の論理式が与えられたとき，**これらの論理式について** $\langle A, \in\rangle$ があたかも全宇宙 $\langle V, \in\rangle$ の初等部分構造となる(すべての論理式ではなくて，これらの論理式についてだけであるが)ような**集合** A を与える．レーヴェンハイム・スコーレム定理(**5.7.1** 参照)は，ある意味でどんなモデル(もちろん**集合**であるモデル)も小さい初等部分モデルをもつことを主張しているので，反映定理はレーヴェンハイム・スコーレム定理の宇宙版といったところであろうか．

定義 5.5.2 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ は $x_1, \cdots, x_n$ のみを自由変数にもつ論理式とする．クラス A が φ を**反映する**とは，

$$\forall x_1\cdots x_n\in A[\varphi^A(x_1, \cdots, x_n)\leftrightarrow\varphi(x_1, \cdots, x_n)]$$

が成り立つこと，すなわち φ が $\langle A, \in\rangle$ に関し絶対的であることをいう†．

定理 5.5.3 (レヴィの**反映定理**) φ が $x_1, \cdots, x_n$ のみを自由変数としてもつ論理式であるとき，これに対し

(1) $\forall\alpha\in\mathrm{OR}\,\exists\beta>\alpha\,\forall x_1, \cdots, x_n\in V_\beta[\varphi^{V_\beta}(x_1, \cdots, x_n)\leftrightarrow\varphi(x_1, \cdots, x_n)]$,

---

† 絶対性は一般の構造の間($\in$-構造に限らない)について定義される概念であるが，**反映性**は $\in$-構造と全宇宙との間に対してのみ適用した絶対性である．

すなわち，φを反映する任意に高い水準の累積タイプ集合 V_β が存在する．

証明　(集合論言語 $\mathcal{L}$ についての)述語論理のみを用いて φ と同値な冠頭形論理式を求めることができる：

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow Q_1 y_1 Q_2 y_2 \cdots Q_m y_m \psi(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$$

ここに Q_i は $\exists$ または $\forall$ であって，ψ は限定作用素 $\exists$，$\forall$ を含まない論理式である．$r=1, 2, \cdots, m$ に対し

$$\psi_r = \psi_r(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_r) \equiv Q_{r+1} y_{r+1} \cdots Q_m y_m \psi(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m)$$

とおく．特に $\psi_m = \psi$ である．r $(1 \le r \le m)$ と集合 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1}$ が与えられているとき，$g_r`\langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1}\rangle$ を次のように定義する：

1°)　$Q_r = \exists$ の場合．このとき g_r は

(2)　$$\exists y_r \psi_r \rightarrow \exists y_r \in V_\delta \psi_r$$

なる最小の順序数 δ であると定める(すなわち，$\psi_r(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1}, y)$ なる y たちの最小階数$+1$ が δ である．もし，かかる y が存在しなければ $\delta=0$ である)．したがって

$$\exists y_r \psi_r \leftrightarrow \exists y_r \in V_\delta \psi_r$$

が成り立つ．

2°)　$Q_r = \forall$ の場合．g_r は

$$\exists y_r \neg\psi_r \rightarrow \exists y_r \in V_\delta \neg\psi_r$$

なる最小の順序数 δ であるとする．したがって

(3)　$$\forall y_r \psi_r \leftrightarrow \forall y_r \in V_\delta \psi_r.$$

任意の順序数 α に対しクラス

$$Y_\alpha^{(r)} = \{g_r`\langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1}\rangle \mid x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1} \in V_\alpha\}$$

は，置換公理によって集合 ($\subset$OR) である．よって $\sup Y_\alpha^{(r)}$ が存在する．そこで

$$F^{(k)}: \mathrm{OR} \longrightarrow \mathrm{OR} \qquad (k \in \omega)$$

を ω 上の帰納法による定義によって，次のように定義する：

$$\begin{cases} F^{(0)}`\alpha = \alpha \\ F^{(1)}`\alpha = \max\{\sup Y_\alpha^{(r)}+1, \alpha+1 \mid 1 \le r \le m\} \\ F^{(k+1)}`\alpha = F^{(1)}`(F^{(k)}`\alpha) \qquad (k \ge 1). \end{cases}$$

再び置換公理によって

$$F`\alpha = \sup\{F^{(k)}`\alpha \mid k \in \omega\}$$

が存在する．この F は次の2条件をみたす：

1°)　$F`\alpha > \alpha$,

2°) $\forall x_1, \cdots, x_n \in V_{F`\alpha} \forall y_1, \cdots, y_m \in V_{F`\alpha} \forall r[1 \leq r \leq m \to$
$g_r`\langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1}\rangle < F`\alpha]$.

なぜなら，$F`\alpha$ は極限数である($F^{(n+1)}`\alpha \geq F^{(n)}`\alpha+1$ に注意)から $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m \in V_{F`\alpha}$ ならばある $k \in \omega$ に対し $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m \in V_{F^{(k)}`\alpha}$ となる．よって $g_r`\langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1}\rangle < F_\alpha^{(k+1)}`\alpha < F`\alpha$. ゆえに 2°)が成り立つ．さて $\delta = g_r`\langle x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1}\rangle < F`\alpha$ により $V_\delta \subset V_{F`\alpha}$，したがって 2°)から g_r の定義により((2), (3)をみよ)

(4) $$Q_r y_r \psi_r \leftrightarrow Q_r y_r \in V_{F`\alpha} \psi_r$$

与えられた順序数 α に対し $\beta = F`\alpha$ ととり，$A = V_\beta$ とおく．**集合** A は φ を反映する：$r=m$ から始めて(4)を適用し次々に $r=m, m-1, \cdots, 0$ とすれば，$x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1} \in A$ に対し

$$\psi_r{}^A(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1}) \leftrightarrow \psi_r(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_{r-1})$$

なることがわかる．(ψ_m は限定作用素を含まないので $\psi_m{}^A = \psi_m$ である．) 特に $r=0$ として

$$\varphi^A(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \cdots, x_n).$$

これで定理が証明された．▨

この結果を有限個の論理式の場合に拡張し，節の初めに述べた形にすると

定理 5.5.4 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ は $x_1, \cdots, x_n$ のみを自由変数にもつ論理式であるとする．このとき

(5) $\forall \alpha \exists \beta > \alpha \forall x_1, \cdots, x_n \in V_\beta[(\varphi_1{}^{V_\beta} \leftrightarrow \varphi_1) \wedge \cdots \wedge (\varphi_k{}^{V_\beta} \leftrightarrow \varphi_k)]$.

証明 (1)を仮定し(5)を導く．そのとき(5)→(1)は明白であるから結局

$$(1) \leftrightarrow (5)$$

となる．さて論理式

$$\varphi \equiv \varphi(z, x_1, \cdots, x_n) \equiv (z=1 \wedge \varphi_1) \vee (z=2 \wedge \varphi_2) \vee \cdots \vee (z=k \wedge \varphi_k)$$

へ $\alpha = \omega$ として(1)を適用すると $\beta > \omega$ が存在して，$x_1, \cdots, x_n, z \in V_\beta$ に対し ($1, 2, \cdots, k \in V_\beta$ に注意)

$$[(z=1 \wedge \varphi_1) \vee \cdots \vee (z=k \wedge \varphi_k)]^{V_\beta} \leftrightarrow (z=1 \wedge \varphi_1) \vee \cdots \vee (z=k \wedge \varphi_k).$$

$i, j \in \omega$ に対し $i=j$ は絶対的であるから $z=i$ ($i=1, 2, \cdots, k$) として

$$i=i \wedge \varphi_i{}^{V_\beta} \leftrightarrow i=i \wedge \varphi_i,$$

したがって $\varphi_i{}^{V_\beta} \leftrightarrow \varphi_i$. かくて

$$(\varphi_1{}^{V_\beta} \leftrightarrow \varphi_1) \wedge \cdots \wedge (\varphi_k{}^{V_\beta} \leftrightarrow \varphi_k)$$

が成り立つ．

そこで上のことを改めて $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ と $\varphi_{k+1}(\alpha)$, φ_{k+2} とに適用する．ここに

$\varphi_{k+1}(\alpha)\equiv\exists\gamma[\gamma>\alpha\wedge\forall x_1,\cdots,x_n\in V_\gamma[(\varphi_1{}^{V_\gamma}\leftrightarrow\varphi_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi_k{}^{V_\gamma}\leftrightarrow\varphi_k)]]$,

$\varphi_{k+2}\equiv\forall\alpha\varphi_{k+1}(\alpha)$.

そのとき $\beta>\omega$ が存在して V_β が φ_1, $\cdots$, φ_{k+2} を反映するようにできる．最初の k 個のものから

$$\forall x_1,\ \cdots,\ x_n\in V_\beta[(\varphi_1{}^{V_\beta}\leftrightarrow\varphi_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi_k{}^{V_\beta}\leftrightarrow\varphi_k)]$$

が得られる．よって φ_{k+1} の形から

$$\forall\alpha<\beta\,\varphi_{k+1}(\alpha).$$

また V_β は $\varphi_{k+1}(\alpha)$ を反映しているから $\forall\alpha\in V_\beta[\varphi_{k+1}{}^{V_\beta}(\alpha)\leftrightarrow\varphi_{k+1}(\alpha)]$，すなわち

$$\forall\alpha<\beta[\varphi_{k+1}{}^{V_\beta}(\alpha)\leftrightarrow\varphi_{k+1}(\alpha)].$$

これらのことから

（6） $$\forall\alpha\in V_\beta\,\varphi_{k+1}{}^{V_\beta}(\alpha).$$

また V_β は $\varphi_{k+2}\equiv\forall\alpha\varphi_{k+1}(\alpha)$ を反映するから $\varphi_{k+2}{}^{V_\beta}\leftrightarrow\varphi_{k+2}$，すなわち

$$\forall\alpha\in V_\beta\,\varphi_{k+1}{}^{V_\beta}(\alpha)\leftrightarrow\forall\alpha\varphi_{k+1}(\alpha).$$

よって(6)から $\forall\alpha\varphi_{k+1}(\alpha)$．これは

$$\forall\alpha\exists\gamma[\gamma>\alpha\wedge\forall x_1,\ \cdots,\ x_n\in V_\gamma((\varphi_1{}^{V_\gamma}\leftrightarrow\varphi_1)\wedge\cdots\wedge(\varphi_k{}^{V_\gamma}\leftrightarrow\varphi_k))],$$

すなわち(5)にほかならない．▒

注意 全証明を検討することによって反映定理(**5.5.4**)は AC なしに成り立つことがわかる．すなわち与えられた φ_1, $\cdots$, φ_k に対し

$$\mathrm{ZF}\vdash(5)$$

がいえるのである．▒

5.6 Δ_1^{ZF}-論理式

本節では，Δ_1^{ZF}-論理式が所有する有用な性質を証明する．また充足性を表わす論理式が Δ_1^{ZF} であることを導く．これらは次章で構成的集合の理論を展開する際，**5.3.5**, **5.3.7** と合せて基本的役割をはたすものである．

定理 5.6.1 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ は x, x_1, $\cdots$, x_n のみを自由変数にもつ $\mathcal{L}$ の論理式で条件

（1） $$\forall x_1\cdots\forall x_n\forall x, z\exists!y\varphi(\langle\langle x, z\rangle, y\rangle, x_1, \cdots, x_n)$$

が成り立ち，しかも φ は Σ_1^{ZF} であるとする．またクラス $G(a_1, \cdots, a_n)$ は φ によって定義されているとする．すなわち

$$G(a_1,\ \cdots,\ a_n)=\{x|\varphi(x,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)\}.$$

このとき，$F(a_1, \cdots, a_n)$ が $G(a_1, \cdots, a_n)$ から $\in$-帰納法によって定義され

たクラスである(**3.6.13** 参照)ならば，パラメタ $a_1, \cdots, a_n$, u から定義された集合 $F(a_1, \cdots, a_n)`u$ は Δ_1^{ZF} である．

証明 記述を簡単にするため，パラメタ $a_1, \cdots, a_n$ を省略する．**3.6.13** の証明におけるように

$$\Theta(f) \equiv \mathrm{Func}(f) \wedge \mathrm{Trans}(\mathrm{Dom}(f)) \wedge \forall x \in \mathrm{Dom}(f)[f`x = G`\langle x, f\restriction x\rangle]$$

とおく．$\Theta(f)$ は Σ_1^{ZF} である．それには $y=G`\langle x, f\restriction x\rangle$ が Σ_1^{ZF} であることをみればよい．ところでそれは(1)によって

$$\exists v \exists z[z=f\restriction x \wedge v=\langle\langle x, z\rangle, y\rangle \wedge \varphi(v)]$$

と表わされる．よって Σ_1^{ZF} である．さてこのとき

$$\begin{aligned} F`u=y &\leftrightarrow \exists f[\Theta(f) \wedge u \in \mathrm{Dom}(f) \wedge y=f`u] \\ &\leftrightarrow \forall f[\Theta(f) \wedge u \in \mathrm{Dom}(f) \rightarrow y=f`u] \end{aligned}$$

が成り立つ．ゆえに $F`u$ は Δ_1^{ZF} である．▨

$\mathrm{Ord}(x)$ は Δ_0^{ZF} であるから，レヴィ階層を考える上で順序数を走る変数 α, β, $\cdots$ はそのまま裸で用いてよい†．**5.6.1** において x を順序数に制限して用いるときは $\in$ の代わりに $<$ を用いることができる．この場合 **$<$-帰納法的定義**とも呼ばれる．

例 1. 順序数上の演算 $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$, α^β は Δ_1^{ZF} である．これを加法についてみてみよう．

$$\begin{aligned} \varphi(z, \alpha, \beta, \gamma) \equiv z \subset \mathrm{OR}^2 \wedge [(\beta=0 \wedge \gamma=\alpha) \vee \exists \delta \in \beta(\beta=\delta+1 \wedge \gamma=z`\delta+1) \\ \vee \forall \delta \in \beta(\delta+1 \in \beta \wedge \gamma=\bigcup z``\beta)] \end{aligned}$$

とすれば φ は Δ_0^{ZF} であり $\forall z, \alpha, \beta \exists ! \gamma \varphi(z, \alpha, \beta, \gamma)$ が証明される．このとき

(2) $$F(\alpha)`\beta = \varphi`\langle F(\alpha)\restriction\beta, \alpha, \beta\rangle = \alpha+\beta \text{ ††}$$

が成り立つ．以下その証明．β についての帰納法を用いる．$F(\alpha)`\beta=\gamma$ とおく．$\beta=0$ のとき．$\varphi`\langle 0, \alpha, 0\rangle=\alpha$．$\beta$ 未満の β_1 に対し $\gamma=\alpha+\beta_1$ が示されたとする．$\beta=\delta+1$ ならば $\gamma=\varphi`\langle F(\alpha)\restriction\beta, \alpha, \beta\rangle=(F(\alpha)\restriction\beta)`\delta+1=F(\alpha)`\delta+1=(\alpha+\delta)+1=\alpha+(\delta+1)=\alpha+\beta$．$\beta \in \mathrm{Lim}$ ならば，$\gamma=\bigcup(F(\alpha)\restriction\beta)``\beta=\bigcup\{F(\alpha)`\delta \mid \delta \in \beta\}=\bigcup\{\alpha+\delta \mid \delta \in \beta\}=\alpha+\beta$．これで(2)が証明されたから，$\alpha+\beta$ は Δ_1^{ZF} である．▨

問 1. $\alpha\cdot\beta$, α^β が Δ_1^{ZF} であることを導け．▨

---

† すなわち，一般の変数 x を用いて，いちいち $\mathrm{Ord}(x) \wedge \cdots$, $\mathrm{Ord}(x) \rightarrow \cdots$ のような用い方をしないでよい．

†† $\varphi`\langle z, \alpha, \beta\rangle \underset{\mathrm{def}}{=} \iota\gamma\varphi(z, \alpha, \beta, \gamma)$

例 2. 階数関数 $\rho(x)$ は Δ_1^{ZF} である．以下その証明：φとして

$$\varphi(z, x, \alpha) \leftrightarrow z \subset \mathrm{OR}^2 \wedge \forall y \in x(z`y+1 \subset \alpha) \wedge \forall \beta \in \alpha \exists y \in x(\beta \in z`y+1)$$

ととると，φは Δ_0^{ZF} で

(3)　$$\forall z, x \exists ! \alpha \varphi(z, x, \alpha)$$

が証明される．このとき $\rho(x)=\varphi`\langle\rho\upharpoonright x, x\rangle$ が成り立つ．これをみるためには xについての $\in$-帰納法を用いればよい．▨

問 2. 例2の議論を詳述せよ．▨

さて，われわれは後で，論理式φと $\in$-構造 $\langle u, \in\rangle$ に対する

$$\langle u, \in\rangle \vDash \varphi$$

なる関係を“集合”として表示しなければならない状況下におかれる．論理式φは“集合”ではないので，φをφの意味を表わすような集合でおきかえる必要がある．いわゆる**ゲーデル化**の方法がそれに役立つ．ゲーデルは彼のいわゆる不完全性定理を証明するために超数学の言語を算術の関係に直す(**ゲーデル数化**する)という素晴らしいアイデアを発見した．今日では，論理学や計算機科学でルーチン的に用いられており，何でもないことのように感じられるであろうが——そしてそれゆえに，これが如何に基本的な考えであるかの証拠でもあるが——当時(1930年代初頭)では画期的な手法であったであろう．このアイデアは集合論にも適応する．ゲーデル自身，もう一つの有名な論文[20]において暗々裡にこれを使用している．

集合論言語 $\mathcal{L}$ の記号のうち個体変数は

(4)　$$\mathrm{v}_0,\ \mathrm{v}_1,\ \mathrm{v}_2,\ \cdots$$

であった．今までの展開ではこれを直接用いず，代わりに $x, y, z, x_1, \cdots$ 等を用いてきた．これらは超記号的使用法であるが，ゲーデル化を行うときは(4)に立ち返らなければならない．さらに定義の単純化のため，論理記号も節約して $\vee$ と $\neg$ だけ，限定作用素は $\exists$ だけとする．$\wedge$ は $\neg\vee\neg$ の，$\rightarrow$ は $\neg\vee$ の，$\forall$ は $\neg\exists\neg$ の省略記法として把握する．論理式 φ の**ゲーデル集合**を $\ulcorner\varphi\urcorner$ で表わす．

定義 5.6.2 (i) $\ulcorner \mathrm{v}_i = \mathrm{v}_j \urcorner = \langle 0, i, j\rangle$, $\ulcorner \mathrm{v}_i \in \mathrm{v}_j \urcorner = \langle 1, i, j\rangle$† とし，以下帰納的に次のように定義する．

---

† 左辺に現われる i, j は，超言語(ZF集合論体系の外の言語)の自然数である．右辺に現われる 0, 1, i, j は，ZF集合論の集合である．よって正確には帰納的に $\mathbf{0}=\phi$, $\boldsymbol{n+1}=\boldsymbol{n}\cup\{\boldsymbol{n}\}$ によって外の自然数nに対応するZFの集合としての $\boldsymbol{n}$ を定義し，右辺は $\langle\phi, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\rangle$, $\langle\phi, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\rangle$ とすべきものである．しかし混乱の恐れもないので，ルーズに同じ記号を用いた．

$$\ulcorner\varphi\vee\psi\urcorner=\langle 2, \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner\rangle,\quad \ulcorner\neg\varphi\urcorner=\langle 3, \ulcorner\varphi\urcorner\rangle,\quad \ulcorner\exists v_i\varphi\urcorner=\langle 4, i, \ulcorner\varphi\urcorner\rangle.$$

(ii) $\mathrm{Fmla}(w)\equiv\exists n\exists f\in V_\omega\,\mathrm{Fm}(w, f, n)$,

ここに

$$\mathrm{Fm}(w, f, n)\equiv n\in\omega\wedge\mathrm{Func}(f)\wedge\mathrm{Dom}(f)=n+1\wedge f`n=w\wedge\forall k\leq n$$
$$[\exists i, j\in\omega(f`k=\langle 0, i, j\rangle\vee f`k=\langle 1, i, j\rangle)\vee\exists l, m<k(f`k=\langle 2, f`l, f`m\rangle\vee$$
$$f`k=\langle 3, f`l\rangle)\vee\exists l<k\exists i\in\omega(f`k=\langle 4, i, f`l\rangle)].$$ ▨

$\mathrm{Fmla}(w)$ は，w が一つの論理式のゲーデル集合であることを主張している．(よって"w は論理式である"と読んでよい．) なぜなら w が n ステップで構成されるとき，$f`i$ $(i<n)$ が i ステップでつくられる(w の)部分論理式を与えるからである．$f\in V_\omega$ となっているのは，定義の(i)によって常に $\ulcorner\varphi\urcorner\in V_\omega$ なることがいえるからである．

問 3. $\mathcal{L}$ の論理式 φ に対し $\ulcorner\varphi\urcorner\in V_\omega$ なることを証明せよ． ▨

定義 5.6.3 $\mathrm{Sat}(w, u, b)\equiv\exists g\exists f, n, r\in V_\omega[\mathrm{Fm}(w, f, n)\wedge r=\rho(w)$

$$\wedge\mathrm{Func}(g)\wedge\mathrm{Dom}(g)=n+1\wedge b\in g`n\wedge\forall k<n+1\,S(k, g, r, f, u)],$$

ここに

$$S(k, g, r, f, u)\equiv\exists i, j\in\omega[(f`k=\langle 0, i, j\rangle\wedge g`k=\{a\in {}^r u\mid a`i=a`j\})$$
$$\vee(f`k=\langle 1, i, j\rangle\wedge g`k=\{a\in {}^r u\mid a`i\in a`j\})$$
$$\vee\ \exists l, m<k[(f`k=\langle 2, f`l, f`m\rangle\wedge g`k=g`l\cup g`m)$$
$$\vee(f`k=\langle 3, f`l\rangle\wedge g`k={}^r u-g`l)]$$
$$\vee\ \exists l<k[f`k=\langle 4, i, f`l\rangle\wedge g`k=\{a\in {}^r u\mid\exists x\in u(a(i/x)\in g`l)\}]].$$

$a(i/x)$ は a において $a`i$ を x でおきかえたものを表わす，すなわち

$$a(i/x)=(a-\{\langle i, a`i\rangle\})\cup\{\langle i, x\rangle\}.$$ ▨

Sat が何を主張しているかをみるために

$$\varphi\equiv\exists v_1\neg[\neg(v_0\in v_1)\vee\neg(v_1\in v_2)],\qquad w=\ulcorner\varphi\urcorner$$

として $\mathrm{Sat}(w, u, b)$ の意味を調べてみよう．(φ は略記号としての $\wedge$ を用いれば $\exists v_1[v_0\in v_1\wedge v_1\in v_2]$ と表わせる．) そこで

$$\mathrm{Sat}(w, u, b)$$

が成り立つとしよう．したがって上述のような g, f, n, r が存在する．ここで $n=6$ であり，$\forall k<7\,S(k, g, r, f, u)$ によって次式が成り立つ：

$$f`0=\langle 1, 0, 1\rangle,\qquad g`0=\{a\in {}^r u\mid a`0\in a`1\}$$
$$f`1=\langle 1, 1, 2\rangle,\qquad g`1=\{a\in {}^r u\mid a`1\in a`2\}$$
$$f`2=\langle 3, f`0\rangle,\qquad g`2={}^r u-g`0$$
$$f`3=\langle 3, f`1\rangle,\qquad g`3={}^r u-g`1$$

$$f`4=\langle 2, f`2, f`3\rangle, \qquad g`4 = g`2\cup g`3$$
$$f`5=\langle 3, f`4\rangle, \qquad g`5 = {}^r u - g`4 = g`0\cap g`1$$
$$\ulcorner\varphi\urcorner = f`6=\langle 4, 1, f`5\rangle, \qquad g`6 = \{a\in {}^r u \mid \exists x\in u[\,a(1/x)\in g`5\,]\}.$$

$r=\rho(w)$ は，w が表わす論理式 φ が含む自由変数の個数の上界を与える．(その意味では初めから r として ω をとっておけばよいのであるが，Sat の定義式の中で ω が使用されると，$a\in {}^\omega u$ が現われるために後の議論展開に支障が起る.) $b\in g`6$ であるから

$$b\in {}^r u, \qquad \exists x\in u[\,b(1/x)\in g`5\,]$$

であり，$b(1/x)=(b-\{\langle 1, b`1\rangle\})\cup\{\langle 1, x\rangle\}$ であるから，$b(1/x)`0=b`0$, $b(1/x)`1=x$, $b(1/x)`2=b`2$. したがって

(5) $\exists x\in u\neg[\neg(b`0\in x)\vee\neg(x\in b`2)]$ i.e. $\exists x\in u[b`0\in x\wedge x\in b`2]$.

いま，φ を $\varphi(\mathrm{v}_0, \mathrm{v}_2)$ とかくと(5)は

$$\langle u, \in\rangle \vDash \varphi(b`0, b`2)$$

を表わしている．

上の例証を一般化することによって，次のことがわかる．

定理 5.6.4 $\varphi(\mathrm{v}_{i_1}, \mathrm{v}_{i_2}, \cdots, \mathrm{v}_{i_n})$ が $\mathcal{L}$ の論理式で，示されたもの以外に自由変数を含まないとし，$w=\ulcorner\varphi\urcorner$ であるとする．$r=\rho(w)$, $b\in {}^r u$ ならば

$$\mathrm{Sat}(w, u, b) \leftrightarrow \langle u, \in\rangle \vDash \varphi(b`i_1, b`i_2, \cdots, b`i_n). \quad ▨$$

定理 5.6.5 論理式 $\mathrm{Sat}(w, u, b)$ は Δ_1^{ZF} である．

証明に先立って Sat の定義式に用いられているいくつかの集合が Δ_1^{ZF} であることを示しておこう．

補題 5.6.6 ω, V_ω, ${}^r u$ $(r\in\omega)$ は Δ_1^{ZF} である．

証明
$$\begin{aligned} x\in\omega &\leftrightarrow x\cup\{x\}\subseteq \mathrm{Succ} \\ &\leftrightarrow \forall\alpha\in x(\alpha=0\vee\exists\beta\in\alpha(\alpha=\beta+1)) \\ &\qquad \wedge \mathrm{Ord}(x)\wedge(x=0\vee\exists\beta\in x(x=\beta+1)) \end{aligned}$$
$$y=\omega\leftrightarrow\forall x\in y(x\in\omega)\wedge\forall x\in\omega(x\in y)$$

であるから ω は Δ_0^{ZF} である．

$$\begin{aligned} y = {}^r u \leftrightarrow & \forall f\in y[\mathrm{Func}(f)\wedge\mathrm{Dom}(f)=r\wedge\mathrm{Rng}(f)\subseteq u] \\ & \wedge\forall f[\mathrm{Func}(f)\wedge\mathrm{Dom}(f)=r\wedge\mathrm{Rng}(f)\subseteq u\to f\in y]. \end{aligned}$$

よってこの形は $y={}^r u$ が Π_1^{ZF}-論理式であることを与える．$f\in {}^r u$ なら $f=\{\langle 0, a_0\rangle, \langle 1, a_1\rangle, \cdots, \langle r-1, a_{r-1}\rangle\}$ である．ここで $a_i\in u$. これを念頭において $y={}^r u$ が Σ_1^{ZF} であることを主張する式を記述する：

$$y={}^r u\leftrightarrow\exists g[\mathrm{Func}(g)\wedge\mathrm{Dom}(g)=r+1\wedge y=g`r\wedge g`0=\{\phi\}$$

$$\wedge \forall k<r[\forall t \in g`(k+1) \exists z \in g`k \exists a \in u(t=z \cup \{\langle k, a\rangle\}) \\ \wedge \forall a \in u \forall z \in g`k \exists t \in g`(k+1)(t=z \cup \{\langle k, a\rangle\})]].$$

よって $y={}^r u$ は Σ_1^{ZF} である．したがってそれは Δ_1^{ZF} である．

$$y=V_\omega \leftrightarrow \exists f[\mathrm{Func}(f) \wedge \mathrm{Dom}(f)=\omega \wedge y=\bigcup \mathrm{Rng}(f) \wedge f`0=\phi \\ \wedge \forall n \in \omega(f`(n+1)=\{\mathrm{Rng}(z) \mid z \in {}^n f(n)\} \cup \{\phi\})]$$

よって $y=V_\omega$ は Σ_1^{ZF} である．このとき

$$y=V_\omega \leftrightarrow \forall z[z=V_\omega \rightarrow y=z]$$

であるから，それは Π_1^{ZF} である．したがって $y=V_\omega$ は Δ_1^{ZF} である．▨

定理 5.6.5 の証明 定義式と **5.6.6** とから $\mathrm{Sat}(w, u, b)$ が Σ_1^{ZF} 論理式であることは明らかである．ところであの g は u, w から一意的に決まるものであるから

$$\mathrm{Sat}(w, u, b) \leftrightarrow \exists f, n, r \in V_\omega[\mathrm{F_m}(w, f, n) \wedge r=\rho(w) \wedge \\ \forall g[(\mathrm{Func}(g) \wedge \mathrm{Dom}(g)=n+1 \wedge \forall k \leq n\, S(k, g, r, f, u)) \\ \rightarrow b \in g`n]]$$

が成り立つ．よってこれは Π_1^{ZF} でもあり，したがって Δ_1^{ZF} である．▨

$$u \models \mathrm{ZF}$$

とは，次の論理式を表わすものとする：

(8) $\forall w \in V_\omega[(w$ は ZF の一つの閉公理式である$) \rightarrow \exists b \in {}^{\rho(u)}u\, \mathrm{Sat}(w, u, b)]$．これはまさしく $\langle u, \in\rangle$ が ZF のモデルであることを主張している．このとき

定理 5.6.7 論理式 $u \models \mathrm{ZF}$ は Δ_1^{ZF} である．▨

証明 “w は ZF の閉公理式である” を $\mathrm{Ax}(w)$ で表わすと，$\mathrm{Ax}(w)$ は Δ_1^{ZF} である．$y=V_\omega$，$z={}^{\rho(u)}u$ は Δ_1^{ZF} であるから (8) と下の補題により $u \models \mathrm{ZF}$ は Δ_1^{ZF} である．▨

補題 5.6.8 $\varphi(x)$ が Δ_n^{ZF} で T が Δ_n^{ZF} なる集合であれば，$\exists x \in T\varphi(x)$, $\forall x \in T\varphi(x)$ は Δ_n^{ZF} である．

証明 $\exists x \in T\varphi(x) \leftrightarrow \exists y[y=T \wedge \exists x \in y\varphi(x)] \leftrightarrow \forall y[y=T \rightarrow \exists x \in y\varphi(x)]$ であるから **5.2.8** により $\exists x \in T\varphi(x)$ は Δ_n^{ZF} である．$\forall x \in T\varphi(x)$ についても同様．▨

なお，ゲーデルの不完全性定理によれば，$\exists u(u \models \mathrm{ZF})$ を ZF で証明することはできないことがわかる．

5.7 レーヴェンハイム・スコーレム定理

モデル理論で重要な働きをするレーヴェンハイム・スコーレム定理を，“標準モデル”$\langle u, \in\rangle$に関し証明する．これはわれわれも第6章で必要とする結果である．（他の型の構造についても成立する．例えば[28]を参照．）ここではタルスキーが改良した形を述べる．

定理 5.7.1 （**下方レーヴェンハイム・スコーレム定理**） u を無限集合，$v\subseteq u$，κ は $|v|\leq\kappa\leq|u|$ なる無限基数であるとする．このとき

$$v\subseteq u^*,\quad |u^*|=\kappa,\quad \langle u^*, \in\rangle\prec\langle u, \in\rangle$$

なるuの部分集合 u^* が存在する．

証明 選択公理によって u を整列し，その順序関係 $\lessdot$ を固定しておく．u の部分集合たちの ω-列 u_n を次のように帰納的に定義する：

$$\begin{cases} u_0 \text{ は } v\subseteq u_0\subseteq u,\ |u_0|=\kappa \text{ なる任意の一つの集合とする．} \\ u_{n+1}=u_n\cup\{a\in u \mid \text{ある論理式 } \psi(x_1, \cdots, x_k, y) \text{ と } u_n \text{ のある要素 } a_1, \cdots, \\ \qquad a_k \text{ に対し } a=\min\limits_{\lessdot}\{b\in u \mid \langle u, \in\rangle\vDash\psi(a_1, \cdots, a_k, b)\}\}. \end{cases}$$

このとき $u_n\subseteq u_{n+1}$ は明らか．そこで

$$u^*=\bigcup_n u_n$$

と定義すれば，$u^*\subseteq u$ である．$|u_0|=\kappa$ なることにもとづきnについての帰納法によって，すべての $n\in\omega$ について $|u_n|=\kappa$ なることがわかる．よって

$$|u^*|=\aleph_0\cdot\kappa=\kappa.$$

これに対し

$$\langle u^*, \in\rangle \prec \langle u, \in\rangle$$

が成り立つ．何となれば：$\varphi(x_1, \cdots, x_k)$ を任意の論理式とし，$a_1, \cdots, a_k\in u^*$ なるとき

$$(1)\qquad \langle u^*, \in\rangle\vDash\varphi(a_1, \cdots, a_k) \quad\leftrightarrow\quad \langle u, \in\rangle\vDash\varphi(a_1, \cdots, a_k)$$

なることを示す．φの構成に関する帰納法を用いる．$\varphi=\exists y\psi(y)$ という形の場合のみを述べる．他の場合(原子論理式の場合も含めて)の証明は，読者の演習にゆずる．さてそこで

$$\langle u, \in\rangle \vDash \exists y\psi(a_1, \cdots, a_k, y)$$

としよう．よってある $b\in u$ が存在して

$$\langle u, \in\rangle \vDash \psi(a_1, \cdots, a_k, b).$$

かかる b たちのうち $\lessdot$-最小なものを a とする．十分大きい n をとると，$a_1, \cdots, a_k \in u_n$ となるから $a \in u_{n+1} \subseteq u^*$．帰納法の仮定により $\langle u^*, \epsilon\rangle \vDash \psi(a_1, \cdots, a_k, a) \leftrightarrow \langle u, \epsilon\rangle \vDash \psi(a_1, \cdots, a_k, a)$.

$$\therefore \quad \langle u^*, \epsilon\rangle \vDash \exists y \psi(a_1, \cdots, a_k, y)$$

逆に，これが成り立てば明らかに $\langle u, \epsilon\rangle \vDash \exists y \psi(a_1, \cdots, a_k, y)$ である．よってこの形の φ に対し(1)が成立する．▨

上の定理の一応用を述べる．証明をみれば明らかなように，この定理は標準モデルに限らず $r \subseteq u^2$ なる関係 r をもつ構造 $\langle u, r\rangle$ に対し成立する，いま，ZF が無矛盾であると仮定しよう．（これはわれわれには証明できないが，われわれの強い希望である.）よって ZF はモデルをもつ——これはいわゆるゲーデルの完全性定理によるものである．これについては [28] の第 2 章を参照——:

$$\langle u, r\rangle \vDash \mathrm{ZF}.$$

ここで $x \in y$ は，$\langle x, y\rangle \in r$ によって解釈するのである．当然 u は無限集合でなければならない．よって **5.7.1** により

$$|u^*| = \aleph_0, \qquad \langle u^*, r|u^*\rangle \prec \langle u, r\rangle$$

なる u の部分集合 u^* が存在する．したがって

$$\langle u^*, r|u^*\rangle \vDash \mathrm{ZF}.$$

しかし，ZF で証明される文の中には「非可算集合の存在」を主張するものがある．それがどうして“可算”モデル $\langle u^*, r|u^*\rangle$ で成立するのであろうか？これは**スコーレムの逆理**と呼ばれる有名な挿話である．

事実はこうである．モデルの中で“非可算”とは何かを考える．すなわち

$$\langle u^*, r|u^*\rangle \vDash \exists a[\neg \exists n \in \omega(a \sim n) \wedge \neg \exists f(f: a \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} \omega)]$$

とは，$w \in u^*$ をモデルで ω を解釈する要素とするとき，$a \in u^*$ なる a で

$$\neg \exists x \in u^*[\langle x, w\rangle \in r \wedge a \sim x] \wedge \exists f \in u^*[f: a \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} w]$$

なるものが存在するということである．ここで $\langle\ \ \rangle$, $\sim$, 1-1, onto などすべては $\langle u^*, r|u^*\rangle$ の意味で考えているのである．よって例えば $\neg \exists f(f: a \xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} w)$ は“u^* の要素 f としては a と w を 1-1, onto 対応させるものがない”ということを主張しているに過ぎない．モデルの領域 u^* はモデルの中ではたしかに宇宙であるが，外からみれば単なる可算集合であり，つくりが簡単過ぎて a と w を 1-1, onto に対応させる関数が u^* の中に要素として存在しないのである．だからモデルの中では“非可算”という集合が存在しうるわけである．

演習問題　V

1.　$n\geq 1$ で $\varphi(x)$ が Δ_n^{ZF}，T が Δ_n^{ZF}-集合ならば，$\{x\in T|\varphi(x)\}$ は Δ_n^{ZF} である．

2.　1）"β は α と共終である" は Σ_1^{ZF} である．

2）"α は正則基数である" は Π_1^{ZF} である．

3.　$y=\mathscr{P}(x)$ は Π_1^{ZF} である．したがって "$\mathscr{P}(x)$ は整列可能である" は Δ_2^{ZF} である．

4.　$\alpha\in\mathrm{Lim}$ ならば，$\mathscr{P}(x)$ は V_α に関し絶対的である．

5.　$H_{\aleph_1}=HE_{\aleph_1}$ を HC で表わし，HC の要素を**遺伝的に可算な集合**という．（演習問題 IV の 9.）

1）$\langle HC,\in\rangle\models$ ZF-(IV)

2）$\langle HC,\in\rangle\not\models$ (IV).

6.　λ が極限順序数ならば $\langle H_{\beth_\lambda},\in\rangle\models$ (IV).

7.　$\varphi(x,y)$ は x,y 以外に自由変数を含まない Δ_1^{ZF}-論理式とする．そのとき

$$\mathrm{ZFC}\vdash\exists x\varphi(x,y)\to\exists x[|\mathrm{TC}(x)|\leq\mathrm{Max}(\aleph_0,|\mathrm{TC}(y)|)\wedge\varphi(x,y)]$$

が成り立つ．（y が現われなくてもよい．）

8.　φ は $\mathcal{L}$ の文で Σ_2^{ZF} であるとする．$\kappa\in\mathrm{Inac}$ ならば

$$\mathrm{ZFC}\vdash\varphi^{V_\kappa}\to\varphi.$$

9.　クラス A が

$$\forall a\in A\forall x[x\subseteq a\to x\in A]$$

をみたすならば，A は**超推移的**であるという．超推移的なら弱超推移的である．各 $\alpha\in\mathrm{OR}$ に対し V_α は超推移的であることを示せ．

6

構成可能集合の世界

本章では，有名なゲーデルの仕事([20], [21])を紹介する．その中心は，**構成可能集合**の概念である．よってその基本的な性質を詳細に調べ，それから

ゲーデルの定理 ZF が無矛盾であれば，ZF へ選択公理 AC と一般連続体仮説 GCH とをつけ加えた公理系も無矛盾である：

$$\text{Consis(ZF)} \text{ ならば } \text{Consis(ZF+AC+GCH)}. \quad ▨$$

という結果の証明へ進む．さらに近時重要性を増した**相対的**構成可能集合の世界についても触れることにする．**本章**では，ことわりがない限り ZF で論ずる†．

6.1 構成可能集合

定義 6.1.1 $v \subseteq u$, $u \neq \phi$ とする．v が $\langle u, \in \rangle$ で(あるいは簡単に u で)**定義可能**であるとは，x, x_1, $\cdots$, x_n のみを自由変数としてもつ集合論言語 $\mathcal{L}$ のある論理式 $\varphi = \varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ と u のある要素たち a_1, $\cdots$, a_n とに対し

$$v = \{x \in u \mid \langle u, \in \rangle \models \varphi(x, a_1, \cdots, a_n)\}$$

が成り立つことである††．a_1, $\cdots$, a_n をパラメタという．このとき v は u で φ によって a_1, $\cdots$, a_n から定義可能である(定義される)ともいう．u で定義可能な集合 v たち全体はクラスをなす．これを Def(u) で表わす．Def(u) の定義式は，次の論理式で与えられる：

$$v \in \mathrm{Def}(u) \leftrightarrow \exists w \in V_\omega \exists b \in {}^{\rho(w)}u \forall x \in u[x \in v \leftrightarrow \mathrm{Sat}(w, u, b(0/x))].$$

† 例えば "$\varphi \to$ AC" を証明するのに，ZFC で行ったのでは意味がないわけである．強調して ZF でということを明示する場合もある．また，途中で AC を使うことがある．その場合，必ず (AC) を記す．[もちろん，"あるモデルで AC が成り立つ" ことを ZFC で証明することは無意味でない．]

†† **5.2.3** との相違は，集合 u が関係しているか否かという点だけである．また，149 ページ脚註 †† において，特に A が集合 u である場合にほかならない．

(V_ω や Sat については **5.6** を参照.) ▨

補題 6.1.2　u を空でない集合とする.

1)　$\mathrm{Def}(u)$ は集合である.

2)　$u \in \mathrm{Def}(u)$.

3)　$\mathrm{Trans}(u) \to \mathrm{Trans}(\mathrm{Def}(u))$ で, $u \subseteq \mathrm{Def}(u)$.

証明　1)　$\mathrm{Def}(u) \subseteq \mathscr{P}(u)$ であるから **2.8.10** により, $\mathrm{Def}(u)$ は集合 $\mathscr{P}(u)$ の部分クラスとして集合である.

2)　$\varphi(x) \equiv x = x$ ととると(パラメタなしの場合として)

$$u = \{x \in u \mid \langle u, \in \rangle \models \varphi(x)\}$$

であるから $u \in \mathrm{Def}(u)$ である.

3)　$b \in a \in \mathrm{Def}(u)$ とする. a の性質から $b \in u$ である. よって

$$\varphi(x, y) \equiv x \in y$$

なる φ をとると, 仮定 $\mathrm{Trans}(u)$ により

$$b = \{x \in u \mid x \in b\} = \{x \in u \mid \langle u, \in\rangle \models \varphi(x, b)\}$$

したがって $b \in \mathrm{Def}(u)$. ゆえに $\mathrm{Trans}(\mathrm{Def}(u))$ である. また, $u \in \mathrm{Def}(u)$ であるから推移性により $u \subseteq \mathrm{Def}(u)$ である. ▨

補題 6.1.3　集合 $\mathrm{Def}(u)$ は u をパラメタとして Δ_1^{ZF} である.

証明　$\theta_1 \equiv \forall t \in y \, \exists w \in V_\omega \, \exists b \in {}^{\rho(w)}u \, \forall x \in u[x \in t \leftrightarrow \mathrm{Sat}(w, u, b(0/x))]$,

$\theta_2 \equiv \forall w \in V_\omega \, \forall b \in {}^{\rho(w)}u \, \exists t \in y \, \forall x \in u[x \in t \leftrightarrow \mathrm{Sat}(w, u, b(0/x))]$

とすると

(1)　$$y = \mathrm{Def}(u) \leftrightarrow \theta_1 \wedge \theta_2$$

が成り立つ. なぜなら, まず θ_1 は $\forall t \in y[t \in \mathrm{Def}(u)]$ にほかならないことに注意しよう. そこで θ_2 が成り立つとする. 任意の $t \in \mathrm{Def}(u)$ をとると

(2)　$$w \in V_\omega, \quad b \in {}^{\rho(w)}u, \quad \forall x \in u[x \in t \leftrightarrow \mathrm{Sat}(w, u, b(0/x))]$$

なる w, b があるから, θ_2 によってかかる w, b に対し

(3)　$$t' \in y, \qquad \forall x \in u[x \in t' \leftrightarrow \mathrm{Sat}(w, u, b(0/x))]$$

なる t' がある. (2)と(3)から外延性公理によって $t = t'$. よって $t \in y$. すなわち $\forall t \in \mathrm{Def}(u)[t \in y]$. よって $\theta_1 \wedge \theta_2 \to y = \mathrm{Def}(u)$ である. 逆に $y = \mathrm{Def}(u)$ なら, $\forall t \in \mathrm{Def}(u)[t \in y]$ から, 与えられた $w \in V_\omega$, $b \in {}^{\rho(w)}u$ に対し $t = \{x \in u \mid \mathrm{Sat}(w, u, b(0/x))\}$ なる t をとると $t \in y$. ゆえに $\theta_2(y, u)$ が成立する. したがって $y = \mathrm{Def}(u) \to \theta_1 \wedge \theta_2$ である. これで(1)が示された.

さて V_ω, ${}^{r}u$, $\mathrm{Sat}(w, u, b(0/x))$ は Δ_1^{ZF} である. よって(1)により $y = \mathrm{Def}(u)$ は Δ_1^{ZF} である. ▨

定義 6.1.4 $\alpha \in \mathrm{OR}$ についての超限帰納法によって，集合 L_α を次のように定義する：

$$\begin{cases} L_0 = \phi \\ L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha) \\ L_\alpha = \bigcup\{L_\beta | \beta < \alpha\} \qquad (\alpha \in \mathrm{Lim}) \end{cases}$$

$$L = \bigcup\{L_\alpha | \alpha \in \mathrm{OR}\}.$$

L の要素を**構成可能集合**という．□

第3章で累積的階層 V_α $(\alpha \in \mathrm{OR})$ を定義した．そこでは $V_{\alpha+1}$ へそれまでに定義された集合 V_α のすべての部分集合たちをとり入れた．しかし今度の $L_{\alpha+1}$ には今までに定義された集合 L_α の部分集合たちのうち L_α という世界で定義可能なもののみをとり込むように制限している．そこが両者の大きな相違点である．

L_α は

$$\alpha \longmapsto V$$

なる一種のクラス関数であり，超限帰納法による定義によって

$$x \in L_\alpha$$

は集合論言語 $\mathcal{L}$ の1個の論理式として記述できる．したがって

$$x \in L \leftrightarrow \exists\alpha(x \in L_\alpha)$$

により，

$$\text{“} x \in L \text{”}$$

もまた $\mathcal{L}$ の1個の論理式で表わすことができる．

補題 6.1.5 1) 各順序数 α に対し L_α は推移的集合で，したがって L は推移的クラスである．

2) $\beta < \alpha \rightarrow L_\beta \subset L_\alpha$, 特に $L_\alpha \subset L_{\alpha+1}$.

3) $L_\alpha \in L_{\alpha+1}$, したがってすべての α について $L_\alpha \in L$.

4) $\alpha \subseteq L_\alpha$, $\alpha \in L_{\alpha+1} - L_\alpha$, $L_\alpha \cap \mathrm{OR} = \alpha$.

5) $\mathrm{OR} \subseteq L$, したがって L は固有クラスである．

6) $L_\omega = V_\omega$.

証明 1) α についての帰納法を用いる．$\mathrm{Trans}(L_0)$ は明らか．そこで $\mathrm{Trans}(L_\alpha)$ と仮定する．**6.1.2** により $\mathrm{Trans}(\mathrm{Def}(L_\alpha))$，すなわち $\mathrm{Trans}(L_{\alpha+1})$．今度は $\alpha \in \mathrm{Lim}$ で，$\beta < \alpha \rightarrow \mathrm{Trans}(L_\beta)$ と仮定する．そのとき $\mathrm{Trans}(\bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta)$ は明らか，すなわち $\mathrm{Trans}(L_\alpha)$．かくて $\forall\alpha\,\mathrm{Trans}(L_\alpha)$．これより $\mathrm{Trans}(L)$ が直ちに従う．

2) αについての帰納法による．**6.1.2** を利用する．

3) $u \in \mathrm{Def}(u)$ から直ちに $L_\alpha \in L_{\alpha+1}$ をうる．$L_{\alpha+1} \subset L$ より $L_\alpha \in L$.

4) まずαについての帰納法で $\alpha \notin L_\alpha$ を証明する．$0 \notin L_0$ は明らか．$\alpha=\beta+1$ とし，$\beta \notin L_\beta$ と仮定する．もし $\alpha \in L_\alpha$ なら $L_{\beta+1}$ の定義によって $\alpha \subseteq L_\beta$. しかし $\beta \subseteq \alpha$ だから $\beta \in L_\beta$ となり仮定に反する．よって $\alpha \notin L_\alpha$. 今度は $\alpha \in \mathrm{Lim}$ とし $\beta<\alpha \to \beta \notin L_\beta$ と仮定する．もし $\alpha \in L_\alpha$ なら $\alpha \in L_\beta$ なる $\beta<\alpha$ が存在する．よって $\beta \in \alpha \in L_\beta$ したがって $\beta \in L_\beta$ となり帰納法の仮定に反する．ゆえに $\alpha \notin L_\alpha$. 次に $\alpha \subseteq L_\alpha \wedge \alpha \in L_{\alpha+1}$ を証明するために，$0 \subseteq L_0$ であるから，帰納法の仮定として $\beta<\alpha \to \beta \subseteq L_\beta \wedge \beta \in L_{\beta+1}$ を仮定する．このとき

$$\beta \in \alpha \to \beta \in L_{\beta+1} \subseteq L_\alpha \to \beta \in L_\alpha \qquad \text{すなわち} \qquad \alpha \subseteq L_\alpha.$$

また $\mathrm{Ord}(x)$ は Δ_0 であるから推移的な L_α に関し絶対的．よって

$$(4) \quad L_{\alpha+1} \ni \{x \in L_\alpha \mid \langle L_\alpha, \in \rangle \models \mathrm{Ord}(x)\} = \{x \in L_\alpha \mid \mathrm{Ord}(x)\} = L_\alpha \cap \mathrm{OR}.$$

$\beta \geq \alpha$ なら $\beta \notin L_\alpha$.（なぜなら，もし $\beta \in L_\alpha$ なら $\alpha \in L_\alpha$ となってしまう．）これと $\alpha \subseteq L_\alpha$ とから $L_\alpha \cap \mathrm{OR}=\alpha$ が得られる．ゆえに(4)から $\alpha \in L_{\alpha+1}$. したがって $\alpha \in L_{\alpha+1}-L_\alpha$ である．

5) 4)により $\mathrm{OR} \subseteq L$.

6) 一般にuが有限集合ならば，$\mathrm{Def}(u)=\mathscr{P}(u)$ である．（問1参照．）$n \in \omega$ についての帰納法で $L_n=V_n$ なることを示す．まず，$L_0=\phi=V_0$. 帰納法の仮定として $L_n=V_n$ とせよ．よって L_n は有限集合である．（問2参照．）したがって

$$L_{n+1}=\mathrm{Def}(L_n)=\mathscr{P}(L_n)=V_{n+1}.$$

ゆえに

$$\forall n \in \omega[L_n=V_n].$$

よって $L_\omega=V_\omega$ が成り立つ．▨

問 1. uが有限集合ならば $\mathrm{Def}(u)=\mathscr{P}(u)$ である．

問 2. 各 $n \in \omega$ について V_n は有限集合である．▨

定義 6.1.6 $\langle x, \alpha \rangle \in \mathrm{Od} \equiv x \in L_\alpha \wedge \forall \beta<\alpha(x \notin L_\beta)$

と定義する．Od はクラス関数である．$x \in L$ に対し $\mathrm{Od}`x$ は $x \in L_\alpha$ なる最小の順序数αであり，これをxの**構成可能性次数**という．▨

補題 6.1.7 $x \in L \to \mathrm{Od}`x \in \mathrm{Suc}$.

証明 $\mathrm{Od}`x=\alpha$ とおくと，$x \in L_\alpha$. もし $\alpha \in \mathrm{Lim}$ なら，$x \in L_\alpha$ はある $\beta<\alpha$ に対し $x \in L_\beta$ なることを意味するから $\mathrm{Od}`x \leq \beta<\alpha$ となり不合理．▨

補題 6.1.8 $x, y \in L$ に対し

$$x \in y \rightarrow \mathrm{Od}`x < \mathrm{Od}`y.$$

証明 $x \in y \in L$ とすると前補題によって $\mathrm{Od}`y = \alpha + 1$ とおくことができる．よってある φ と $a_1, \cdots, a_n \in L_\alpha$ に対し

$$y = \{t \in L_\alpha \mid \langle L_\alpha, \in \rangle \models \varphi(t, a_1, \cdots, a_n)\}^{\dagger}$$

と表わされる．したがって $x \in L_\alpha$ であるから $\mathrm{Od}`x \leq \alpha$. よって $\mathrm{Od}`x < \mathrm{Od}`y$. ▨

補題 6.1.9 $x \in L \rightarrow \rho(x) + 1 \leq \mathrm{Od}`x$.

証明 $\in$-帰納法でこれを証明するために，$y \in x \in L \rightarrow \rho(y) + 1 \leq \mathrm{Od}`y$ が成り立つとする．このとき **6.1.8** を用いて

$$\rho(x) = \bigcup\{\rho(y) + 1 \mid y \in x\} \leq \bigcup\{\mathrm{Od}`y \mid y \in x\} \leq \mathrm{Od}`x.$$

$\mathrm{Od}`x$ は後者順序数であるから，もし第2の $\leq$ が $=$ であれば，$\cup$ と後者順序数の性質によってある $y \in x$ に対し $\mathrm{Od}`y = \mathrm{Od}`x$ とならなければならないので不合理．よって $\bigcup\{\mathrm{Od}`y \mid y \in x\} < \mathrm{Od}`x$. したがって $\rho(x) + 1 \leq \mathrm{Od}`x$. ▨

例 1. $\omega \in L$. なぜなら $L_\omega = V_\omega$ と，$\{\ \ \}$，$\cup$，Succ の絶対性を用いて

$$\omega = \{x \in V_\omega \mid x \in \omega\} = \{x \in V_\omega \mid x \cup \{x\} \subseteq \mathrm{Succ}\}$$
$$= \{x \in L_\omega \mid \langle L_\omega, \in \rangle \models x \cup \{x\} \subseteq \mathrm{Succ}\} \in L_{\omega+1}.$$

よって $\omega \in L_{\omega+1}$ である．▨

問 3. $\alpha \in \mathrm{OR}$ ならば $\mathrm{Od}`\alpha = \alpha + 1$. ▨

さて，以下で L が ZFC のモデルであることを証明しよう．いくつかの補題を積み上げることによってこの作業を行う．

補題 6.1.10 $\langle L, \in \rangle \models \mathrm{ZF} - \{\mathrm{IV}, \mathrm{VII}\}$.

証明 **5.4.1** を用いる．L は推移的であるから，それは公理(Ⅰ)，(Ⅴ)，(Ⅷ)のモデルである．また例1により $\omega \in L$ であるから(Ⅵ)を満たす．$\varphi(x) \equiv x = a \vee x = b$ は Δ_0-論理式であるから絶対的，したがって

$$a, b \in L \rightarrow \{a, b\} \in L.$$

ゆえに L は公理(Ⅱ)をみたす．$\psi(x) \equiv \exists y \in a(x \in y)$ も Δ_0 であるから絶対的である．よって

$$a \in L \rightarrow \bigcup a \in L.$$

(特に $\alpha > \mathrm{Od}`a$ ならば $\bigcup a \in L_{\alpha+1}$ である．) ゆえに L は公理(Ⅲ)を満足する．▨

---

† 正確には，ある $w \in V_\omega$, $b \in {}^r L_\alpha$ に対し $y = \{t \in L_\alpha \mid \mathrm{Sat}(w, L_\alpha, b(0/t))\}$ とすべきものである．(ただし $r = \rho(w)$ である．) しかし，上の非公式的記法の方がわかりやすいであろう．

補題 6.1.11　集合 x に対し，$x \subset L$ ならば，$x \subseteq L_\alpha$ をみたす順序数 α が存在する．

証明　$x \subset L$ ならば，Od‘‘x は順序数から成る一つの集合であるから

$$\alpha = \bigcup \{\mathrm{Od}`y \mid y \in x\}$$

なる順序数 α が定まる．$y \in x \to y \in L_\alpha$ であるから $x \subseteq L_\alpha$. ▨

一般に，クラス A が条件

$$\forall x[x \subseteq A \to \exists y \in A(x \subseteq y)]$$

をみたすとき，A は**殆ど宇宙的**であるという．$L_\alpha \in L$ であるからこの用語を使うと，**6.1.11** は次のように述べられる：

補題 6.1.11′　構成可能集合たちのクラス L は殆ど宇宙的である．▨

補題 6.1.12　$\langle L, \in \rangle \models$ (IV).

証明　任意に $x \in L$ をとる．論理式 $z \subseteq x$ は Δ_0 であるから絶対的．よって

$$\{z \in L \mid \langle L, \in \rangle \models z \subseteq x\} = \{z \in L \mid z \subseteq x\} = L \cap \mathcal{P}(x).$$

これは集合であるから前補題により $L \cap \mathcal{P}(x) \subseteq L_\alpha$ なる α がある．よって

$$L \cap \mathcal{P}(x) = \{z \in L_\alpha \mid \langle L_\alpha, \in \rangle \models z \subseteq x\} \in L_{\alpha+1}.$$

ゆえに $\forall x \in L(L \cap \mathcal{P}(x) \in L)$ なることがわかった．したがって $\langle L, \in \rangle$ で (IV) が成り立つ．▨

補題 6.1.13　$\langle L, \in \rangle \models$ (VII′).

証明　簡単のため，論理式 $\phi(x)$ はパラメタを含まないとして

(5)　$$\langle L, \in \rangle \models \forall u \exists v \forall x[x \in v \leftrightarrow x \in u \land \phi(x)]$$

を証明しよう．任意に $u \in L$ をとり Od‘$u = \alpha$ とする．集合

$$v = \{x \in u \mid \phi^L(x)\}$$

が L に属することを示せばよい．x, γ を変数として 3 つの論理式

$$\phi^L(x), \quad \exists \xi(x \in L_\xi), \quad x \in L_\gamma$$

に対し拡張された反映定理 **5.5.4** を適用すると，$\beta > \alpha$ なる順序数 β で次の条件をみたすものが存在する：$x, \gamma \in V_\beta$ に対し

(6)　$$(\phi^L(x))^{V_\beta} \leftrightarrow \phi^L(x),$$

(7)　$$\exists \xi \in V_\beta(x \in L_\xi)^{V_\beta} \leftrightarrow \exists \xi(x \in L_\xi),$$

(8)　$$(x \in L_\gamma)^{V_\beta} \leftrightarrow x \in L_\gamma.$$

これらを書き直すと

(6′)　$$\phi^{L \cap V_\beta}(x) \leftrightarrow \phi^L(x)$$

(7′)　$$\exists \xi < \beta(x \in L_\xi{}^{V_\beta}) \leftrightarrow \exists \xi(x \in L_\xi),$$

(8′)　$$x \in L_\gamma{}^{V_\beta} \leftrightarrow x \in L_\gamma$$

となる．(7′)，(8′)を用いると，$x\in V_\beta$ ならば

(9) $$x\in L\leftrightarrow \exists\xi<\beta(x\in L_\xi{}^{V_\beta})\leftrightarrow \exists\xi<\beta(x\in L_\xi)\leftrightarrow x\in L_\beta.$$

この最後の同値式は β が極限数であることから従う．[$\beta\in\mathrm{Lim}$ であることは次のようにしてわかる：もし $\beta=\eta+1$ であれば，(9) の前半により ($x=\eta$ ととって) $\xi<\beta$, $\eta\in L_\xi$ なる ξ がとれる．よって $\mathrm{Od}`\eta\leq\xi$. しかし問3により $\mathrm{Od}`\eta=\eta+1=\beta>\xi$ であるから不合理．ゆえに $\beta\in\mathrm{Lim}$.] したがって

(10) $$V_\beta\cap L=L_\beta.$$

かくて(6′)により

$$x\in V_\beta\rightarrow[\psi^{L_\beta}(x)\leftrightarrow\psi^L(x)].$$

これと(10)および $x\in u\rightarrow x\in L_\alpha\subset L_\beta$ なることから

$$v=\{x\in L_\beta|\psi^{L_\beta}(x)\wedge x\in u\}.$$

ゆえに v は u ($\in L_\beta$) をパラメタとして L_β で定義可能，すなわち $v\in L_{\beta+1}$.
これは(5)を証明した．▨

補題 6.1.14 $\langle L,\in\rangle\models$(VII).

証明 簡単のため，$\varphi(x,y)$ が x, y 以外に自由変数を含まない場合に

(11) $$\forall x,y,z[\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,z)\rightarrow y=z]$$
$$\rightarrow\forall u\exists v\forall y[y\in v\leftrightarrow\exists x\in u\varphi(x,y)]$$

が L で成り立つことを示そう．そのため

$$\forall x,y,z\in L[\varphi^L(x,y)\wedge\varphi^L(x,z)\rightarrow y=z]$$

が成り立つとする．よって $x,y\in L$ に対し $\varphi^L(x,y)$ は“関数”を表わすから任意の $u\in L$ に対し

$$\{y|y\in L\wedge\exists x\in u\varphi^L(x,y)\}$$

は集合であり，しかも L に(部分集合として)含まれる．よって **6.1.11** により，ある L_α に含まれる．**6.1.13** によって L で(VII′)を用いることができるから

$$v=\{y\in L_\alpha|\langle L,\in\rangle\models\exists x\in u\varphi(x,y)\}=\{y|y\in L\wedge\exists x\in u\varphi^L(x,y)\}$$

は L に属する集合である．($\alpha>\mathrm{Od}`u$ ととっておけば $v\in L_{\alpha+1}$ である．) ゆえに

$$\langle L,\in\rangle\models\forall y[y\in v\leftrightarrow\exists x\in u\varphi(x,y)].$$

これは(11)が L で成り立つことを証明した．▨

以上の **6.1.10**, **6.1.12**, **6.1.14** を総合すると次の重要な結果が得られる：

定理 6.1.15 L は ZF の推移モデルである：$\langle L,\in\rangle\models\mathrm{ZF}$. ▨

さて次の定理は，次節で必要になる大切な性質である．

定理 6.1.16 論理式 $x=L_\alpha$, $y\in L_\alpha$ は Δ_1^{ZF} である．したがってこれらは ZF-絶対的である．

証明 $\mathrm{Def}(x)$ は Δ_1^{ZF} であるから論理式 φ

$$\varphi(x,\alpha,y)\equiv\alpha\in\mathrm{OR}\wedge[(\alpha=0\wedge y=\phi)\vee\exists\beta<\alpha(\alpha=\beta+1\wedge y=\mathrm{Def}(x`\beta))\vee(\alpha\in\mathrm{Lim}\wedge y=\bigcup\mathrm{Rng}(x))]$$

も Δ_1^{ZF} で，しかも $\forall x\forall\alpha\exists!y\varphi(x,\alpha,y)$ が成り立つ．ゆえに φ から $<$-帰納法によって定義された

$$F`\alpha=\varphi`\langle F\restriction\alpha,\alpha\rangle$$

は **5.6.1** により Δ_1^{ZF} である．α についての超限帰納法によって

$$L_\alpha=F`\alpha$$

なることがわかるから $x=L_\alpha$ は Δ_1^{ZF} である．次に

$$y\in L_\alpha\leftrightarrow\exists x(x\in L_\alpha\wedge y\in x)\leftrightarrow\forall x(x=L_\alpha\rightarrow y\in x)$$

が成り立つから $y\in L_\alpha$ は Δ_1^{ZF} である．定理の後半は **5.3.7** から直ちに従う．▨

6.2 構成可能性公理

前節で定義した構成可能集合全体のクラス L は，ZF のモデルでしかもすべての順序数を含むものであった．そこで“すべての集合が構成可能集合である”と仮定しても，すなわち $V=L$ と仮定しても不都合は起らないようにみえる．

$$V=L$$

という主張を**構成可能性公理**という．ゲーデルはまず ZF が無矛盾であるとすれば $V=L$ と仮定しても矛盾が起らないことを証明した上で，$V=L$ という仮定から選択公理 AC と一般連続体仮説 GCH とが証明されることを示した．したがって ZF が無矛盾であれば

$$\mathrm{ZF}+\mathrm{AC}+\mathrm{GCH}^{\dagger}$$

も無矛盾であるとなるわけである††.

† 一般に公理系 T へ文 φ を公理として加えた公理系を $T+\varphi$ で表わす．

†† このような無矛盾性を，ZF の無矛盾性を仮定しているがゆえに，**相対的無矛盾性**という．これは ZF$+V=L$ とか ZFC$+$GCH が仮定なしに無矛盾である(すなわち絶対的無矛盾性)ことを意味しない．ZF の無矛盾性が証明されるならば，絶対的無矛盾となる．しかし ZF の無矛盾性はわれわれには証明できない．――証明を試みる際，われわれはいったいどんな立場でそれを行うべきであろうか．ゲーデルの第 2 不完全性定理([28]の第 5 章を参照)によれば，それは ZF を真に含む立場でなければならない．広い立場で狭い範囲のものの無矛盾性が示されたところで余り意味はないであろう．

本節では上述の第一のもの，すなわち

定理 6.2.1 ZF が無矛盾であれば，

$$\mathrm{ZF}+V=L$$

も無矛盾である．▨

を証明しよう．第2のものは後節で述べる．

定理 6.2.2 クラス M が ZF の推移モデルで，$\mathrm{OR}\subseteq M$ であれば，$L\subseteq M$. よって L は OR を含む ZF の推移モデルのうち最小のものである．

証明 α についての超限帰納法で

(1) $$L_\alpha \in M \qquad (したがって\ L_\alpha\subseteq M)$$

が成り立つことを証明する．$\alpha=0$ のときは明白．そこで与えられた順序数 α に対し(1)が成り立つと仮定する．

$$\mathrm{ZF}\vdash \exists y[y=\mathrm{Def}(L_\alpha)]$$

であり，$\langle M, \in\rangle$ は ZF のモデルであるから

$$\exists y\in M[y=\mathrm{Def}(L_\alpha)]^M$$

が成立する．$y=\mathrm{Def}(u)$ は y, u をパラメタとして Δ_1^{ZF} であるから M に関し絶対的，したがって，$L_\alpha\in M$ に注意して

$$\exists y\in M[y=\mathrm{Def}(L_\alpha)].$$

よって $L_{\alpha+1}=\mathrm{Def}(L_\alpha)\in M$. 今度は $\alpha\in\mathrm{Lim}$ とし $\beta<\alpha\rightarrow L_\beta\in M$ と仮定する．よって $L_\alpha=\bigcup\{L_\beta|\beta<\alpha\}\subseteq M$ が成り立つ．そこで

$$\psi(\beta, y)\equiv(\beta<\alpha\wedge y=L_\beta)\vee(\beta\geq\alpha\wedge y=\phi)$$

なる論理式 ψ を考える（α はパラメタである）．$y\in M$ に対し

$$\psi^M(\beta, y)\leftrightarrow\psi(\beta, y)$$

であるから，$\psi^M(\beta, y)$ は M において関数を定義する．よってモデル $\langle M, \in\rangle$ における置換公理により

$$\{\psi^{M}\text{‘}\beta|\beta<\alpha\}=\{\psi\text{‘}\beta|\beta<\alpha\}=\{L_\beta|\beta<\alpha\}$$

は M の集合である．したがって $\bigcup$ の絶対性によって $L_\alpha=\bigcup\{L_\beta|\beta<\alpha\}\in M$. これで $\forall\alpha[L_\alpha\in M]$ なることが証明された．ゆえに $L\subseteq M$. ▨

定義 6.2.3 $\langle M, \in\rangle$ が ZF の推移モデルであるとき

$$L^M=\{x\in M|(x\in L)^M\}=\{x\in M|\langle M, \in\rangle\models x\in L\}$$

と定義する．L^M はモデル $\langle M, \in\rangle$ で定義された構成可能集合たちのクラスである．▨

さて $\mathrm{OR}\subseteq M$ なる推移モデル M において，$x\in M$ ならば（論理式 $x\in L_\alpha$ の絶対性により）

$$(x \in L)^M \leftrightarrow \exists \alpha \in M(x \in L_\alpha)^M \leftrightarrow \exists \alpha(x \in L_\alpha) \leftrightarrow x \in L,$$

すなわち $L^M = L \cap M$. ゆえに **6.2.2** によって

$$L^M = L.$$

かくて次の結果が得られる：

定理 6.2.4　$\langle M, \in \rangle$ が ZF の推移モデルで $\mathrm{OR} \subseteq M$ ならば,

(2)　$$L = L^M \subseteq M.$$ ▨

系 6.2.5　L は $V=L$ のモデルである. すなわち

$$\mathrm{ZF} \vdash (V=L)^L$$

が成り立つ.

証明　(2)から直ちに $L^L = L$ が得られる. $(V=L)^L$ は $L = L^L$ にほかならない. ▨

以上の準備の下に, **6.2.1** は次のように証明される.

定理 6.2.1 の証明　ZF が無矛盾であると仮定する. もし ZF$+V=L$ から矛盾が導かれるとすれば, L は ZF$+V=L$ のモデルであるから, その矛盾は $(\mathrm{ZF})^L + (V=L)^L$ から導かれるはずである. ところが $(\mathrm{ZF})^L$ と $(V=L)^L$ が成り立つことが ZF において証明されている(**6.1.15** および **6.2.5**)から, 結局, ZF から矛盾が導かれることになって仮定に反する. よって ZF$+V=L$ は無矛盾でなければならない. ▨

ここで, 本章の今までの全証明は**選択公理なしに**実行されていることを注意しておこう.

6.3　選択公理との関係

本節では

(1)　$$\mathrm{ZF} \vdash (V=L \rightarrow \mathrm{AC})$$

を証明する. そうすれば

$$(\mathrm{AC})^L \qquad \text{すなわち} \qquad \langle L, \in \rangle \models \mathrm{AC}$$

が成り立つ. なぜなら L は ZF のモデルであるから, (1)によって

(2)　$$(V=L)^L \rightarrow (\mathrm{AC})^L.$$

6.2.5 により(2)の前提は成り立っているから

$$(\mathrm{AC})^L$$

が得られる.

そこで(1)の証明であるが，実は $V=L$ を仮定すると AC よりも強い結果が証明される：

クラス形整列定理 宇宙 V は整列される．すなわち，非反射的全順序関係 $\lessdot$ ($\subseteq V^2$) が存在して，$\lessdot$ は V を整列する．$\lessdot$ はクラスとしての存在である．▨

この関係 $\lessdot$ を集合 u に制限したもの $\lessdot|u$ は u を整列するから **3.9.2** を用いると

$$\text{クラス形整列定理} \to \text{整列可能定理} \to \text{AC}$$

となる．

そこで $V=L$ を仮定して，V を整列する全順序関係 $\lessdot$ を定める論理式 $\psi(x, y)$ を構成する．アイデアは次のようである．仮定によって $V=\bigcup\{L_\alpha|\alpha\in \text{OR}\}$ であるから，各 L_α が整列できればよい．そこですでに L_α が整列されているとして，L_α の整列順序と論理式のゲーデル集合たち全体の集合 F の整列順序とを用いて，$\text{Def}(L_\alpha)-L_\alpha$ を整列する全順序関係を定義する．そうすると V を整列する全順序(これはクラスである)が得られるわけである．その際，当然のことながら ω 上の帰納法や α についての超限帰納法が用いられる．

まず，論理式全体の集合 $\text{Fmla}=\{w|\text{Fmla}(w)\}$ を整列することから始める．

$$F_n=\{w\in V_\omega|\ \exists f\in V_\omega \text{Fm}(w, f, n)\}$$

とおけば，$n\in\omega$ に対し

$$\begin{cases} F_0=2\times\omega\times\omega \\ F_{n+1}=F_n\cup(\{2\}\times F_n\times F_n)\cup(\{3\}\times F_n)\cup(\{4\}\times\omega\times F_n) \end{cases}$$

が成り立つ．F_0 を辞書式に並べる．その整列順序を $<_0$ で表す†．F_n の整列順序 $<_n$ がすでに定義されているとし，F_{n+1} 上の順序関係 $<_{n+1}$ を，まず

$$(\{2\}\times F_n\times F_n)\cup(\{3\}\times F_n)\cup(\{4\}\times\omega\times F_n)$$

を辞書式に整列し，次にそれを既に整列されている F_n の後へおくことによって得られる順序であると定義する．

$v\in F$ に対し，$\nu(v)=\mu n[v\in F_n]$ とし

$$v\lessdot w \equiv v,\ w\in F\wedge[\nu(v)<\nu(w)\vee(\nu(v)=\nu(w)\wedge v<_{\nu(w)}w)]$$

と定義する．このとき $\lessdot$ は F を整列する．(F が集合であるから $\lessdot$ も集合として得られることはもちろんである．)

そこで L_α が $\lessdot_\alpha$ によって整列されていると仮定したとき，$L_{\alpha+1}$ を整列し

† この記号は **5.5.1** の類似の記号とは無関係である．

よう．まず $L_0=L_1=\phi$ に注意して

$$\lessdot_0=\lessdot_1=\phi$$

とする．

$\lessdot_{\alpha+1}$ の定義：われわれは $V=L$ を仮定しているから任意の集合 x は構成的集合であり，したがって $\mathrm{Od}`x$ が定義されていることに注意する．$v, w\in \mathrm{Fmla}$, $b\in{}^{\rho(v)}L_\alpha$, $c\in{}^{\rho(w)}L_\alpha$ に対し

$$\langle v, b\rangle\lessdot_\alpha\langle w, c\rangle \equiv (v\lessdot w)\vee(v=w\wedge \exists i<\rho(v)[\forall j(0<j<i \to b`j = c`j)\wedge b`i\lessdot_\alpha c`i])$$

とするとき

$$x\lessdot_{\alpha+1}y \equiv (x\in L_\alpha\wedge y\in L_{\alpha+1}-L_\alpha)\vee[\mathrm{Od}`x=\mathrm{Od}`y=\alpha+1\wedge \exists v, w\exists b\in{}^{\rho(v)}L_\alpha\exists c\in{}^{\rho(w)}L_\alpha(x=\{t\in L_\alpha\mid \mathrm{Sat}(v, L_\alpha, b(0/t))\}\wedge [v\text{はかかる }\lessdot\text{-最小なものである}]\wedge y=\{t\in L_\alpha\mid\mathrm{Sat}(w, L_\alpha, c(0/t))\} \wedge[w\text{ はかかる }\lessdot\text{-最小なものである}]\wedge\langle v, b\rangle\lessdot_\alpha\langle w, c\rangle)]$$

と定める．

$\alpha\in\mathrm{Lim}$ のときの L_α の定義：$\beta<\alpha$ なる β に対し $\lessdot_\beta$ がすでに定義されているとする．$x, y\in L_\alpha$ に対し

$$x\lessdot_\alpha y \equiv \exists\beta, \gamma<\alpha[\beta\leq\gamma\wedge\mathrm{Od}`x=\beta\wedge\mathrm{Od}`y=\gamma\wedge x\lessdot_\gamma y]$$

と定める．

これですべての $\alpha\in\mathrm{OR}$ に対し $\lessdot_\alpha$ が定義された．そこで

$$x\lessdot y \equiv \exists\alpha[x\lessdot_\alpha y]$$

と定義する．$\lessdot$ の始切片が集合であることは定義から直ちにわかる．また $\lessdot$ が V $(=L)$ を整列することも明白である．このことから **3.4.6** により

$$\langle V, \lessdot\rangle\cong\langle\mathrm{OR}, \in\rangle$$

が成り立つ．すなわち V は $\lessdot$ によって OR と同じ順序型に整列されるのである．

上のことをまとめると，次の定理が得られる：

定理 6.3.1 (i) $V=L\to$ クラス形整列定理；したがって，$V=L\to\mathrm{AC}$.

(ii) $\langle L, \in\rangle$ は ZFC の推移モデルである†.

(iii) ZF が無矛盾であれば ZFC も無矛盾である．

証明 (ii) 上述の議論を L で相対化すれば，$\langle L, \in\rangle\models\mathrm{AC}$ なることがわかる．(iii) は **6.2.1** の証明の論法(前節の末尾)にならえばよい．▨

---

† 正確に記述すると次のようになる：φ が ZFC の閉公理式ならば $\mathrm{ZF}\vdash\varphi^L$.

問 1.　上の $<'$ は仮定 $V=L$ とは無関係に L 上の関係（すなわち $<'\subseteq L^2$）として定義され，それは L を整列する．このとき $x<'y$ は Σ_1-論理式であることを示せ．▒

6.4　一般連続体仮説との関係

本節は次の定理を証明することを目的とする．

定理 6.4.1　$\mathrm{ZF}\vdash(V=L\to\mathrm{GCH})$　▒

ここで GCH とは

（1）
$$\mathrm{GCH}\equiv\forall\alpha\in\mathrm{OR}[2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}]$$

であった．この定理によって前節のようにして次の結果が得られる．

定理 6.4.2　（i）　$\langle L,\in\rangle\models\mathrm{ZF}+\mathrm{AC}+\mathrm{GCH}$.

（ii）　ZF が無矛盾であれば ZF+AC+GCH も無矛盾である．▒

以下で，**6.4.1** の証明を実行する．

集合 u が有限集合であることを $\mathrm{Fin}(u)$ で表わした．すなわち

$$\mathrm{Fin}(u)\equiv\exists n\in\omega[u\sim n].$$

そのとき

補題 6.4.3　（i）　$\mathrm{Fin}(u)\to\mathrm{Fin}(\mathrm{Def}(u))$.

（ii）　$n\in\omega\to\mathrm{Fin}(L_n)$.

（iii）　(AC)　$|u|\geq\aleph_0\to|\mathrm{Def}(u)|=|u|$.

（iv）　(AC)　$\alpha\geq\omega\to|L_\alpha|=|\alpha|$.

ここで (AC) は，その命題の証明に選択公理を必要とすることを表すためにつけた印である．

証明　（i）　$\mathrm{Def}(u)\subseteq\mathcal{P}(u)$ であり，u が有限集合ならば $\mathcal{P}(u)$ もそうであるから，$\mathrm{Def}(u)$ は有限集合である．

（ii）　(i)から明らか．

（iii）　$\mathrm{Def}(u)$ の各要素 x は Fmla のある要素 w と $b\in{}^{\rho(w)}u$ なるある b とによって決定される．よって

（2）
$$|\mathrm{Def}(u)|\leq|\mathrm{Fmla}\times\bigcup\{{}^n u\mid n\in\omega\}|.$$

ところで $|u|\geq\aleph_0$ であるから **4.4.8, 4.4.10** によれば†

$$|\bigcup\{{}^n u\mid n\in\omega\}|\leq\sum_n|{}^n u|=\sum_n|u|=\aleph_0|u|=|u|$$

となり(2)により

† これらは，AC を必要とする結果であった．

$$\mathrm{Def}(u) \leq |\mathrm{Fmla}|\cdot|\bigcup\{{}^n u \mid n\in\omega\}| = \aleph_0|u| = |u|.$$

また $x\in u$ なら $\{x\}\in\mathrm{Def}(u)$ であるから $|u|\leq\mathrm{Def}(u)$. したがって

$$|\mathrm{Def}(u)| = |u|.$$

(iv) $\alpha\geq\omega$ とし α についての超限帰納法を用いる. 1°) $\alpha=\omega$ のとき. $L_\omega=V_\omega$ であったから $|L_\omega|=|V_\omega|=\aleph_0=|\omega|$. 2°) $|L_\alpha|=|\alpha|$ と仮定し $L_{\alpha+1}=\mathrm{Def}(L_\alpha)$ を考える. (iii)により $|L_{\alpha+1}|=|\mathrm{Def}(L_\alpha)|=|L_\alpha|=|\alpha|=|\alpha+1|$. 3°) $\alpha\in\mathrm{Lim}$ とし $\beta<\alpha\rightarrow|L_\beta|=|\beta|$ が成り立つと仮定する.

$$|L_\alpha| = |\bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta| \leq \sum_{\beta<\alpha}|L_\beta| \leq |\alpha|\cdot|\alpha| = |\alpha| \quad (\textbf{4.4.4}\text{ による}).$$

他方, $\alpha\subseteq L_\alpha$ (**6.1.5**)であるから $|\alpha|\leq|L_\alpha|$. したがって $|L_\alpha|=|\alpha|$. ▨

以上の準備の下に最初の定理を証明する.

定理 6.4.1 の証明 $V=L$ を仮定する. よってわれわれは公理系 ZFC をすべて満足するところの構成可能集合たちの世界 L で議論することになり **6.4.3** の使用も許される. 任意に順序数 α をとる. $\aleph_{\alpha+1}\leq 2^{\aleph_\alpha}$ であるから GCH (1)を証明するためには, $2^{\aleph_\alpha}\leq\aleph_{\alpha+1}$ が成り立つことをいえばよい. このためには

(3) $$\mathcal{P}(L_{\aleph_\alpha})\subseteq L_{\aleph_{\alpha+1}}$$

なることを示せば十分である. なぜならこのとき **6.4.3** によって

$$2^{\aleph_\alpha} = |\mathcal{P}(\aleph_\alpha)| = |\mathcal{P}(L_{\aleph_\alpha})| \leq |L_{\aleph_{\alpha+1}}| = |\aleph_{\alpha+1}| = \aleph_{\alpha+1}$$

が成り立つからである. そこで(3)を証明するために任意に $z\subseteq L_{\aleph_\alpha}$ をとる.

$$L_{\aleph_\alpha}\cup\{z\}\subseteq V_{\beta_0}$$

なる順序数 β_0 がある. よって反映定理により, $\beta>\beta_0$ なる β で

(4) $$L_{\aleph_\alpha}\cup\{z\}\subseteq V_\beta,$$

(5) $$\forall x\in V_\beta[(x\in L)^{V_\beta}\leftrightarrow x\in L],$$

(6) $V_\beta\models S$ (S は L を定義したり, "$x\in L_\gamma$" が Δ_1^S であることを証明するのに必要な ZF の公理たちの有限集合.)†

をみたすものが存在する. 仮定により $x\in L$ は成立しているから(5)は

(5′) $$\forall x\in V_\beta(x\in L)^{V_\beta}$$

となる. **6.4.3** によって $|L_{\aleph_\alpha}\cup\{z\}|=\aleph_\alpha$ が成り立つことに注意し, V_β と V_β の部分集合 $L_{\aleph_\alpha}\cup\{z\}$ とについてレーヴェンハイム・スコーレム定理を適用すると, $\langle V_\beta,\in\rangle$ の初等部分構造 $\langle y,\in\rangle$ で, すなわち

(7) $$\langle y,\in\rangle\prec\langle V_\beta,\in\rangle$$

なるもので,

---

† S が十分大きければ "$x\in L_\gamma$" が Δ_1^S であることを証明できる.

(8) $$|y|=\aleph_\alpha, \qquad L_{\aleph_\alpha}\cup\{z\}\subseteq y$$
をみたすものが存在する．(5′)，(7)により
(9) $$\forall x\in y(x\in L)^y.$$
モストウスキー同型定理により
$$f: y \longrightarrow v \ (\in\text{-同型}), \qquad \mathrm{Trans}(v)$$
なる集合 $v=f``y$ とつぶし関数 f とがある．(8)により $|v|=\aleph_\alpha$ であり，$L_{\aleph_\alpha}$ は y の推移部分集合であるから
$$f`x=x \quad \text{for} \quad x\in L_{\aleph_\alpha}$$
である．$z\subseteq L_{\aleph_\alpha}$ という仮定から
$$f`z=\{f`x|x\in z\}=\{x|x\in z\}=z.$$
ゆえに $z\in v$．一方(8)から
$$\forall x\in v(x\in L)^v \qquad \text{すなわち} \qquad \forall x\in v(\exists\gamma[x\in L_\gamma])^v.$$
$x\in L_\gamma$ は Δ_1^S で v は推移的な S のモデルであるから $x\in L_\gamma$ は $\langle v, \in\rangle$ に関し絶対的．よって
$$\forall x\in v\,\exists\gamma\in v(x\in L_\gamma).$$
特に x として z をとれば，$z\in L_\gamma$ なる $\gamma\in v$ の存在がいえる．$\gamma\subseteq v$ であるから $|\gamma|\le|v|=\aleph_\alpha$．ゆえに $\gamma<\aleph_{\alpha+1}$．よって
$$z\in L_\gamma\subseteq L_{\aleph_{\alpha+1}} \quad \text{i.e.} \quad z\in L_{\aleph_{\alpha+1}}.$$
これは $\mathcal{P}(L_{\aleph_\alpha})\subseteq L_{\aleph_{\alpha+1}}$ を証明した．▨

以上で，本章の初めに述べたゲーデルの定理の証明が完了した．この定理は，選択公理や一般連続体仮説を使って数学を展開しても(ZF が無矛盾である限り) 合法的であることを示しており，数学者にとって大きな福音であるといわなければならない．

6.5 最小モデル

本節では，最小モデルは(存在すれば) $\langle L_\alpha, \in\rangle$ という形であることを示す．ただし，最小モデルの存在は ZFC では証明することができない．

いま，u を ZF の推移 $\in$-モデルとしよう．すなわち
$$\langle u, \in\rangle\models \mathrm{ZF}, \qquad \mathrm{Trans}(u)$$
とする．順序数の概念は u に関し絶対的である．α_0 を u に属さない**最小**の順序数とする．α_0 を u の**指標**といい $\mathrm{Index}(u)$ で表わす．定義から
$$\beta<\alpha_0 \to \beta\in u$$

であるが，u の推移性から

$$\beta \geq \alpha_0 \to \beta \notin u.$$

また α_0 は極限数である．なぜならもし $\alpha_0=\beta+1$ とすれば，$\beta \in u$ であり，u は $\{\ \ \}$ や $\bigcup$ に関し閉じているから

$$\alpha_0=\beta+1=\beta \cup \{\beta\} \in u$$

となって不合理．上のことを定理にまとめる：

定理 6.5.1 $\langle u, \in\rangle$ が ZF の推移モデルならば，$\mathrm{Index}(u)=u\cap \mathrm{OR}$ であり，$\mathrm{Index}(u)$ は極限数である．▨

系 6.5.2 $\mathrm{Index}(u)=\sup\{\alpha \in \mathrm{OR} \mid \alpha \in u\}$．▨

補題 6.5.3 u は推移集合で $\langle u, \in\rangle \models \mathrm{ZF}$ であるとし，$\alpha_0=\mathrm{Index}(u)$ とする．このとき

(i) $\beta \in u \to L_\beta \in u$，したがって $L_{\alpha_0} \subseteq u$．さらに $\beta \in u \to L_\beta \subseteq u$．

(ii) $L^u=u\cap L_{\alpha_0}=L_{\alpha_0}$

(iii) $\langle L_{\alpha_0}, \in\rangle \models \mathrm{ZF}+V=L$.†

証明 (i) **6.2.2** の証明を u の中の順序数に関する超限帰納法，すなわち α_0 までの超限帰納法に制限すればよい．

(ii) まず定義によって

$$L^u=\{x \in u \mid (x \in L)^u\}.$$

$x \in u$ に対し，L_α の絶対性と $\alpha_0 \in \mathrm{Lim}$ とを用いて

$$(x \in L)^u \leftrightarrow \exists \alpha \in u (x \in L_\alpha)^u \leftrightarrow \exists \alpha < \alpha_0 (x \in L_\alpha) \leftrightarrow x \in L_{\alpha_0}$$

よって(i)により $L^u=u\cap L_{\alpha_0}=L_{\alpha_0}$．

(iii) φ を $\mathrm{ZF}+V=L$ の一つの公理とする．$\langle L, \in\rangle \models \mathrm{ZF}+V=L$ により

$$\varphi^L$$

が成り立つ．これは ZF で証明されるのであるから

(1) $$(\varphi^L)^u$$

が成り立つ．論理式 φ の構成についての帰納法により

(2) $$(\varphi^L)^u=\varphi^{L^u}\ \ (=\varphi^{L_{\alpha_0}})$$

なることが示されるから

$$\varphi^{L_{\alpha_0}}$$

が成り立つ．これは $\langle L_{\alpha_0}, \in\rangle \models \mathrm{ZF}+V=L$ を証明した．▨

問 1. (2)を証明せよ．▨

定理 6.5.4 u が推移的集合で $\langle u, \in\rangle \models \mathrm{ZF}+V=L$ ならば，

---

† よってもちろん AC も成り立つ．

$$u=L_{\alpha_0}.$$

ここに $\alpha_0=\mathrm{Index}(u)$ である.

証明 仮定により $(V=L)^u$ が成り立つ. $V^u=u$ であり, 前補題により $L^u=L_{\alpha_0}$ であるから $u=L_{\alpha_0}$. ▨

さて上の議論では, u が ZF の推移 $\in$-モデルであることを仮定していた. そこで, ZF の推移的集合の $\in$-モデルが存在することを主張する公理 SM を導入する:

$$\mathrm{SM} \equiv \exists u[\mathrm{Trans}(u) \wedge u \models \mathrm{ZF}]^{\dagger}$$

明らかに SM は集合論言語 $\mathcal{L}$ の文である. (**5.6** の(8)参照.) 以下では

$$\mathrm{ZF}+\mathrm{SM}$$

で議論を進める. ゲーデルの第2不完全性定理(例えば [28] を参照) によって SM は ZF で証明することができないことがわかる.

定義 6.5.5 推移的集合 u が ZF の $\in$-モデルであって, ZF のどんな推移的 $\in$-モデルにも含まれないならば, $\langle u, \in\rangle$ は(あるいは簡単に u は) ZF の**最小モデル**であるという. ▨

定理 6.5.6 (最小モデルの存在定理) ZF+SM において: ZF の最小モデルが存在する. この最小モデルは $\langle L_\alpha, \in\rangle$ という形をもち, したがってそれは $V=L$ のモデルである.

証明 仮定により, $\langle u, \in\rangle \models \mathrm{ZF}$ なる推移的集合 u がある. $\alpha_0=\mathrm{Index}(u)$ とすれば, **6.5.3** により L_{α_0} は ZF$+V=L$ のモデルである. そこで

$$\langle L_\xi, \in\rangle \models \mathrm{ZF}$$

なる最小の順序数 ξ を ξ_0 とする. よって $\langle L_{\xi_0}, \in\rangle$ は ZF の推移 $\in$-モデルである. 前の議論と同様にして $\xi_0 \in \mathrm{Lim}$ なることがわかる. いま, $\langle v, \in\rangle$ を ZF の任意の推移 $\in$-モデルとし $\beta_0=\mathrm{Index}(v)$ とする. $\langle L_{\beta_0}, \in\rangle$ は ZF の推移 $\in$-モデルであるから ξ_0 の最小値によって $\xi_0 \leq \beta_0$. ゆえに

$$L_{\xi_0} \subseteq L_{\beta_0}=L\cap v \qquad \text{すなわち} \qquad L_{\xi_0} \subseteq v.$$

よって L_{ξ_0} は最小である. これで ZF の最小モデルの存在が証明され, しかもそれは $\langle L_{\xi_0}, \in\rangle$ という形をもつことがわかった.

またこのことから **6.5.2** により $L_{\xi_0}=L^{L_{\xi_0}}$ が成り立つ. よって

$$(V=L)^{L_{\xi_0}}$$

が成立する. これは $\langle L_{\xi_0}, \in\rangle \models V=L$ を意味する. ▨

---

† SM は Standard Model (標準モデル)の頭文字である.

定理 6.5.7 (ZF+SM) ZF の最小モデルは可算モデルである．

証明 $\langle L_{\xi_0}, \in\rangle$ を ZF の最小モデルとする．ξ_0 が可算順序数であることを示せばよい．下方レーヴェンハイム・スコーレム定理によって

$$\langle v, \in\rangle \prec \langle L_{\xi_0}, \in\rangle$$

なる L_{ξ_0} の可算部分集合 v が存在する．モストウスキー同型定理により

$$\langle u, \in\rangle \cong \langle v, \in\rangle$$

なる推移的集合 u が存在する．$\mathrm{Index}(u)=\alpha_0$ とおくと $\alpha_0 \le \xi_0$ であって，α_0 は可算順序数かつ $\langle L_{\alpha_0}, \in\rangle \models \mathrm{ZF}$．ゆえに ξ_0 の最小性によって $\xi_0=\alpha_0$ でなければならない．ゆえに ξ_0 は可算順序数である．▨

問 2． α_0 はなぜ可算順序数であるか．▨

6.6 相対的構成可能集合

構成可能集合の概念は，与えられた集合 u に関し相対化される．この概念が現われて以来四半世紀になるが，その間いろいろな問題解決に応用された．典型的な応用の一例は「可測基数の存在 (MC) が GCH と両立する」ことの証明であろう．スコットにより $V=L$ は MC と両立しないことが示された(1961年)ので，$V=L$ より弱い GCH が MC と両立するかという問題が考えられる．これに対する肯定的解決に相対的構成可能集合の世界が利用される（シルバー 1971 年)．これらについてはここに述べる余裕がないので興味ある読者はシルバーの原論文あるいはドレークやイェックの本 [4], [6] などを参照されたい．

今まで使用していた集合論言語 $\mathcal{L}$ は = 以外に述語記号は 2 項述語記号 $\in$ をただ一つ含むだけであった．したがって対応する構造は

$$\langle A, R\rangle, \qquad R \subseteq A^2$$

という形のものであった．ここで $\mathcal{L}$ へ新しく一つの単項述語記号

$$U$$

を加え，原子論理式として

$$U(x) \qquad (x \text{ は変数})$$

なる形のものを追加して拡大言語をつくる．この言語を $\mathcal{L}_1$ で表そう．$\mathcal{L}_1$ の一般の論理式の定義は $\mathcal{L}$ の場合と同様である．構造

$$\langle A, R, u\rangle, \quad R \subseteq A^2, \quad u \subseteq A$$

を $\mathcal{L}_1$ に対する構造という．われわれは特に

（1）　$$\langle A, \epsilon, u\rangle, \qquad u \subseteq A$$

（ここでももちろん ϵ は $\epsilon|A$ の略記である）なる形の ϵ-構造に関心をもっている．よって以下では，かかる ϵ-構造のみを取り扱うことにする．$\mathcal{L}_1$ で定義されたいろいろな理論（すなわち公理系）は $U(x)$ を $x \in u$ と解釈することによって(1)なる形の構造で解釈されるわけである．

置換公理図式の φ として $\mathcal{L}_1$ の論理式を許せば拡大された ZF 集合論が得られるのであるが，われわれはそのような議論を行わない．あくまで今までの言語 $\mathcal{L}$ にもとづく ZF 集合論にとどまる．

構造 $\langle A, \epsilon\rangle$ に関し定義した $\mathrm{Def}(A)$ に対応して構造 (A, ϵ, u) に関して $\mathrm{Def}(A, u)$ を次のように定義する．一般に $u \subseteq A$ とは制限しない．

$$x \in \mathrm{Def}(A, u) \equiv [\mathcal{L}_1 \text{ のある論理式 } \varphi(t, y_1, \cdots, y_n) \text{ と } A \text{ のある要素 } a_1, \cdots, a_n \text{ とに対し } x = \{t \in A | \langle A, \epsilon, u \cap A\rangle \models \varphi(t, a_1, \cdots, a_n)\}]$$

したがって $\mathrm{Def}(A, u) = \mathrm{Def}(A, u \cap A)$ である．

第5章 **5.6** で述べた論理式のゲーデル化をわずかだけ修正して $\mathcal{L}_1$ の論理式をゲーデル化することができる．例えば

$$\ulcorner U(\mathrm{v}_i)\urcorner = \langle 0, i\rangle$$

を追加すればよい．かくして新しく Fm_U, Fmla_U が“$\mathcal{L}$ の論理式”として定義され，それに応じて Sat_U も“$\mathcal{L}$ の論理式”として得られるから，結局新しく定義した $\mathrm{Def}(v, u)$ は $\mathcal{L}$ にもとづく今までの ZF で取り扱うことができる．

補題 6.6.1　（i）　集合 v, u に対し $\mathrm{Def}(v, u)$ は集合であり，v, $v \cap u \in \mathrm{Def}(v, u)$．

（ii）　$\mathrm{Trans}(v) \to \mathrm{Trans}(\mathrm{Def}(v, u)) \wedge v \subseteq \mathrm{Def}(v, u)$．

（iii）　$\mathrm{Def}(v, u)$ は Δ_1^{ZF} であり，したがって ZF-絶対的である．

証明　**6.1.2**, **6.1.3** における証明と同様である．$v \cap u \in \mathrm{Def}(v, u)$ なることは，$\varphi(t)$ として $U(t)$ をとることにより

$$\{t \in v | \langle v, \epsilon, v \cap u\rangle \models U(t)\} = \{t \in v | t \in v \cap u\} = v \cap u$$

となることによる．▨

定義 6.6.2　任意の集合 u に対し $L_\alpha[u]$, $L[u]$ を次のように定義する：

$$\begin{cases} L_0[u] = \phi, \\ L_{\alpha+1}[u] = \mathrm{Def}(L_\alpha[u], u), \\ L_\alpha[u] = \bigcup\{L_\beta[u] | \beta < \alpha\} \qquad (\alpha \in \mathrm{Lim}), \end{cases}$$

$$L[u] = \bigcup\{L_\alpha[u] | \alpha \in \mathrm{OR}\}.$$

$L[u]$ の要素を u **に関する構成可能集合**という．また，$L[u]$ を u に関する**相対的構成可能集合の世界**という．▨

いま，$\mathcal{L}_1$ の論理式を強調して

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n, U)$$

のように書き表わすことにしよう．$x \in L_{\alpha+1}[u]$ であるとすれば，$\mathcal{L}_1$ のある論理式 $\varphi(y, x_1, \cdots, x_n, U)$ と，ある集合 $a_1, \cdots, a_n \in L_\alpha[u]$ とに対し

$$x = \{t \in L_\alpha[u] \mid \langle L_\alpha[u], \epsilon, u \cap L_\alpha[u]\rangle \models \varphi(t, a_1, \cdots, a_n, U)\}$$

である．右辺の

$$\langle L_\alpha[u], \epsilon, u \cap L_\alpha[u]\rangle \models \varphi(t, a_1, \cdots, a_n, U)$$

では，φ に現われる $U(s)$ なる形の部分は $s \in u \cap L_\alpha[u]$ によって解釈される．よって今までに(すなわち α までに)つくられた相対的構成可能集合たちのうち u **に属するもの**を集めたところの $u \cap L_\alpha[u]$ を"第2階の"パラメタとして使用することを許したものと考えられる．

定理 6.6.3 (i) $L_\alpha \subseteq L_\alpha[u]$.

(ii) $L_\alpha[u]$ は推移的で，$\beta \leq \alpha \to L_\beta[u] \subseteq L_\alpha[u]$.

(iii) u, y, α をパラメタとして $y = L_\alpha[u]$ は Δ_1^{ZF} である．したがって $y \in L_\alpha[u]$ も Δ_1^{ZF} である．

(iv) $L[u]$ は L の推移的拡張で，$\langle L[u], \epsilon\rangle \models \mathrm{ZF}$.

(v) $L[u]$ を整列する Σ_1^{ZF}-関係が存在する．したがって

$$\mathrm{ZF} \vdash V = L[u] \to \mathrm{AC}.$$

証明 (i) $\mathcal{L}$ の論理式は $\mathcal{L}_1$ の論理式であるからである．

(ii)～(iv) の証明は **6.1** におけると同様である．

(v) の証明は **6.3** におけると同様である．▨

注意 必ずしも $u \in L[u]$ や $u \subseteq L[u]$ はいえない．▨

定理 6.6.4 (i) $u \cap L[u] = v \cap L[u] \to \forall \alpha [L_\alpha[u] = L_\alpha[v]] \wedge L[u] = L[v]$.

(ii) $\forall \alpha (L_\alpha[u] = L_\alpha[u \cap L[u]])$ したがって $L[u] = L[u \cap L[u]]$.

(iii) $u \cap L[u] \in L[u]$.

証明 (i) $u \cap L[u] = v \cap L[u]$ と仮定する．α についての超限帰納法で

(1) $$L_\alpha[u] = L_\alpha[v]$$

を証明する．まず，$L_0[u] = L_0[v]$ は明白．帰納法の仮定として(1)を仮定する．初めの仮定によって $L_\alpha[u] \cap u \cap L[u] = L_\alpha[u] \cap v \cap L[u]$ であるから

$$L_\alpha[u] \cap u = L_\alpha[u] \cap v = L_\alpha[v] \cap v \qquad \text{(by (1))}$$

よって

$$L_{\alpha+1}[u]=\mathrm{Def}(L_\alpha[u],\ u\cap L_\alpha[u])=\mathrm{Def}(L_\alpha[v],\ v\cap L_\alpha[v])=L_{\alpha+1}[v].$$

今度は $\alpha\in\mathrm{Lim}$ とし $\beta<\alpha\to L_\beta[u]=L_\beta[v]$ とする．極限数 α に対する $L_\alpha[u]$, $L_\alpha[v]$ の定義によって $L_\alpha[u]=L_\alpha[v]$ が成り立つ．

(ii) (i)において v として $u\cap L[u]$ をとればよい．

(iii) $u\cap L[u]$ は集合であるから，次に示す **6.6.5** によって

$$u\cap L[u]=u\cap L_\alpha[u]$$

なる順序数 α が存在する．**6.6.1** によって

$$u\cap L_\alpha[u]\in\mathrm{Def}(L_\alpha[u],\ u)=L_{\alpha+1}[u].$$

これらから $u\cap L[u]\in L[u]$ なることがわかる．▨

補題 6.6.5 集合 x に対し $x\subseteq L[u]$ ならば，$x\subseteq L_\alpha[u]$ なる順序数 α が存在する．

証明 **6.1.11** の証明と同様である．▨

定理 6.6.6 $L[u]$ では**相対的構成可能性公理** $V=L[u]$ が成り立つ：

$$\langle L[u],\ \in\rangle\models V=L[u].$$

証明 **6.6.4** によって $L[u]=L[u\cap L[u]]$ であるから

$$(2)\qquad \langle L[u],\ \in\rangle\models V=L[u\cap L[u]]$$

が成り立つことを示せばよい．**6.6.3** により $x\in L_\alpha[y]$ は x, y, α をパラメタとして Δ_1^{ZF}. よって ZF-絶対的である．$u\cap L[u]\in L[u]$ に注意して

$$\begin{aligned}(V=L[u\cap L[u]])^{L[u]}&\leftrightarrow \forall x\in L[u]\,\exists\alpha(x\in L_\alpha[u\cap L[u]])^{L[u]}\\&\leftrightarrow \forall x\in L[u]\,\exists\alpha(x\in L_\alpha[u\cap L[u]])\\&\leftrightarrow \forall x\in L[u](x\in L[u]).\end{aligned}$$

右辺は正しいので

$$(V=L[u\cap L[u]])^{L[u]}$$

が成り立つ．これは(2)を意味する．したがって $L[u]^{L[u]}=L[u]$ である．▨

定理 6.6.7 $(\mathrm{AC})^{L[u]}$，したがって $\langle L[u],\ \in\rangle\models\mathrm{ZFC}$.

証明 **6.6.3** (v)と **6.6.6** とによる．▨

定理 6.6.8 u を与えられた集合とする．クラス M が次の3条件をみたすならば，$L[u]\subseteq M$ である：

1°) $\mathrm{OR}\subseteq M$, 2°) M は ZF の推移的 $\in$-モデルである，3°) $u\cap M\in M$.

すなわち，$L[u]$ はこの3条件をみたす最小のモデルである．

証明 α についての超限帰納法によって

$$(3)\qquad L_\alpha[u]\in M,$$

(4) $$L_\alpha[u]=L_\alpha[u\cap M],$$

(5) $$u\cap L_\alpha[u]=u\cap M\cap L_\alpha[u]\in M$$

を証明する．まず $\alpha=0$ のときは明白である．そこで α に対し(3)～(5)を仮定する．

$$\mathrm{ZF}\vdash\ \exists y(y=\mathrm{Def}(L_\alpha[u],\ u\cap L_\alpha[u]))$$

である．M は ZF のモデルで，$L_\alpha[u]\in M$, $u\cap L_\alpha[u]\in M$ であるから

$$\exists y\in M(y=\mathrm{Def}(L_\alpha[u],\ u\cap L_\alpha[u]))^M.$$

$y=\mathrm{Def}(v,u)$ の絶対性によって

$$\exists y\in M(y=\mathrm{Def}(L_\alpha[u],\ u\cap L_\alpha[u])).$$

したがって $\mathrm{Def}(L_\alpha[u], u\cap L_\alpha[u])\in M$, すなわち $L_{\alpha+1}[u]\in M$. M は推移的なるゆえ $L_{\alpha+1}[u]\subseteq M$, したがって $u\cap M\in M$ を用いて

(6) $$u\cap L_{\alpha+1}[u]=u\cap M\cap L_{\alpha+1}[u]\in M.$$

$L_{\alpha+1}[u]=L_{\alpha+1}[u\cap M]$ なることは(4)から直ちに従う．次に $\lambda\in\mathrm{Lim}$ とし，$\alpha<\lambda$ なるすべての α に対し(3)～(5)が成り立つと仮定する．このとき **6.2.2** の証明と同様にして $L_\lambda[u]\in M$ なることが示される．$L_\lambda[u]=L_\lambda[u\cap M]$ は $\alpha<\lambda$ なる α に対する(4)から直ちに従う．$u\cap L_\lambda[u]=u\cap M\cap L_\lambda[u]\in M$ の証明は(6)のそれと同様である．かくて，すべての $\alpha\in\mathrm{OR}$ に対し(3)が成り立つことが示された．ゆえに $L[u]\subseteq M$ である．▨

6.7 別な相対化の方法

前節で述べた相対化をふり返ってみよう．u を与えられた集合とする．**6.6.5** によって

$$u\cap L[u]\subseteq L_\alpha[u]$$

なる順序数 α が存在する．よって

$$\gamma\geq\alpha\rightarrow u\cap L[u]\subseteq L_\gamma[u],\qquad u\cap L[u]=u\cap L_\gamma[u].$$

特に $u\cap L[u]=u\cap L_\alpha[u]\in L_{\alpha+1}[u]$. そこで $\gamma\geq\alpha+1$ なる γ をとる．

(1) $$u\cap L_\gamma[u]=u\cap L[u]\in L_{\alpha+1}[u]\subseteq L_\gamma[u]$$

であるから $u\cap L[u]\in L_\gamma[u]$ であって

$$\mathrm{Def}(L_\gamma[u],\ u\cap L_\gamma[u])=\mathrm{Def}(L_\gamma[u],\ u\cap L[u]).$$

いま，$\mathcal{L}_1$ の論理式 $\varphi(t, x_1, \cdots, x_n, U)$ と $a_1, \cdots, a_n\in L_\gamma[u]$ をとって

$$x=\{t\in L_\gamma[u]\mid\langle L_\gamma[u],\ \in,\ u\cap L_\gamma[u]\rangle\models\varphi(t,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ U)\}$$

を考える．φ に現われる $U(s)$ なる部分は $s\in u\cap L_\gamma[u]$ と解釈されるのであ

るから(1)によって $s\in u\cap L[u]$ と解釈される．そこで $\varphi'(t, x_1, \cdots, x_n, y)$ を $\varphi(t, x_1, \cdots, x_n, U)$ の中の $U(z)$ なる部分をすべて $z\in y$ によっておきかえて得られる $\mathcal{L}$ の論理式であるとすれば，$u\cap L[u]\in L_\gamma[u]$ に注意して

$$\langle L_\gamma[u], \in, u\cap L[u]\rangle\models\varphi(t, a_1, \cdots, a_n, U)$$
$$\leftrightarrow\langle L_\gamma[u], \in\rangle\models\varphi'(t, a_1, \cdots, a_n, u\cap L[u]).$$

よって

$$\mathrm{Def}(L_\gamma[u])=\mathrm{Def}(L_\gamma[u], u\cap L[u])=\mathrm{Def}(L_\gamma[u], u\cap L_\gamma[u])$$

となる．換言すれば，$\gamma\geq\alpha+1$ なる段階 γ では $L_{\gamma+1}[u]$ は $\mathcal{L}_1$ の述語 U には関係せず，単に $L_\gamma[u]$ のみに依存することとなる．

そこで，もう一つの相対化の定義を与える．

定義 6.7.1　u を与えられた集合とするとき，$L_\alpha(u)$, $L(u)$ を次のように定義する：

$$\begin{cases} L_0(u)=\mathrm{TC}(u), \\ L_{\alpha+1}(u)=\mathrm{Def}(L_\alpha(u)), \\ L_\alpha(u)=\bigcup\{L_\beta(u)\mid\beta<\alpha\} \qquad (\alpha\in\mathrm{Lim}), \end{cases}$$
$$L(u)=\bigcup\{L_\alpha(u)\mid\alpha\in\mathrm{OR}\}.$$

$L(u)$ の要素を u **から構成可能**であるという．▨

この**定義**によると，上の議論は次のようにまとめられる：

定理 6.7.2　与えられた集合 u に対し，α を $u\cap L[u]\subseteq L_\alpha[u]$ なる最小の順序数とする．このとき

$$L[u]=L(L_{\alpha+1}[u]).\ ▨$$

$L_\alpha(u)$, $L(u)$ についても $L_\alpha[u]$, $L[u]$ と類似な性質が証明される．そのうちいくつかのものは，**6.8** に述べられるであろう．ここで一つだけ注意すると，$L(u)$ は ZF の推移モデルであるが，選択公理 AC が成立するとは限らない．これが $L[u]$ との大きな相違点である．例えば ZF で(すなわち AC なしに) $u=\mathcal{P}(\omega)$ とすれば $\mathcal{P}(\omega)\in L(u)$ であるが，$\mathcal{P}(\omega)$ が整列可能であることを証明することができない．しかし一般に，$\mathrm{TC}(u)$ が $L(u)$ で整列可能であれば，$L(u)$ で AC が成立する．このような観点から，一般に $L[u]$ の方が $L(u)$ よりも**よい**モデルであるといえよう．

問 1.　$L[u]\subseteq L(u)$ なることを証明せよ．▨

6.8　相対的構成可能性公理と一般連続体仮説の関係

本節では，相対的構成可能性公理 $V=L[u]$ と GCH との関係を調べる．そこでuを与えられた集合とし，

（1）　$$V=L[u]$$

と仮定する．われわれは ZFC にいるから AC にもとづく基数の理論を自由に用いることができる．目標は，ある順序数 η_0 があって

（2）　$$\eta\geq\eta_0\rightarrow 2^{\aleph_\eta}=\aleph_{\eta+1}$$

となることの証明である．仮定(1)によって

（3）　$$u\in L_{\aleph_{\eta_0}}[u] \qquad (\text{したがって } u\subseteq L_{\aleph_{\eta_0}}[u])$$

なる順序数 η_0 が存在する．この η_0 に対し(2)が成り立つことを証明する．そのためには

（4）　$$\eta\geq\eta_0\rightarrow \mathcal{P}(L_{\aleph_\eta}[u])\subseteq L_{\aleph_{\eta+1}}[u]$$

が証明できればよい．なぜならそのとき次に述べる **6.8.1** の(iii)を用いてただちに(2)が証明できるからである．

補題 6.8.1　（i）　$n\in\omega\rightarrow \mathrm{Fin}(L_n[u])$.

（ii）（AC）　$|v|\geq\aleph_0\rightarrow|\mathrm{Def}(v,u)|=|v|$.

（iii）（AC）　$\alpha\geq\omega\rightarrow|L_\alpha[u]|=|\alpha|$.

証明　（i）　$L_0[u]=\phi$ と $L_{n+1}[u]\subseteq\mathcal{P}(L_n[u])$ $(n\in\omega)$ とから直ちに従う．

（ii）　$\mathrm{Def}(v,u)$ の要素は $\mathcal{L}_1$ の論理式 w と $b\in{}^{\rho(w)}u$ および $v\cap u$ によって決定される．よって

$$|\mathrm{Def}(v,u)|\leq|\mathrm{Fmla}^*|\cdot|\bigcup\{{}^n v\mid n\in\omega\}|\cdot|v|=\aleph_0|v||v|=|v|.$$

ここに Fmla* は $\mathcal{L}_1$ の論理式のゲーデル集合の集合であって，それは可算である．

（iii）　$\alpha\geq\omega$ としてαについての帰納法による．(ii)を用いて **6.4.3** の証明と同様に行う．▨

そこで(4)の証明であるが，これは **6.4** の方法と殆ど同様であるから省略してよいであろう．

問 1.　(4)の証明を実行せよ．▨

以上まとめて

定理 6.8.2　u を与えられた集合とし $V=L[u]$ が成り立つとする．そのときある順序数 η_0 に対し

（2） $$\eta \geq \eta_0 \to 2^{\aleph_\eta} = \aleph_{\eta+1}$$

が成り立つ. ▒

それでは，$\alpha < \eta_0$ なる α に対してはどうであろうか. すなわち $V = L[u]$ とし $u \in L_{\aleph_{\eta_0}}$ なる最小の η_0 が >0 であるとき，$\alpha < \eta_0$ なる α に対し $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ が成立するであろうか. これは u の性質によるのである. 例えば，可測基数の存在を仮定すると，このようなある u で $L[u]$ において GCH が成立するようなものの存在が示される.

もう一つの相対化に対しても，**6.8.2** に類似な結果が成り立つ. 対応する補題と共に述べる：

補題 6.8.3 (AC)

（i） $\mathrm{TC}(u)$ が有限集合ならば,

$$n \in \omega \to \mathrm{Fin}(L_n(u)), \qquad \alpha \geq \omega \to |L_\alpha(u)| = |\alpha|.$$

（ii） $\mathrm{TC}(u)$ が無限集合なら

$$\alpha \leq |\mathrm{TC}(u)| \to |L_\alpha(u)| = |\mathrm{TC}(u)|, \qquad \alpha > |\mathrm{TC}(u)| \to |L_\alpha(u)| = |\alpha|.$$

証明 （i） **6.4.3** の証明と同様である.

（ii） $|L_0(u)| = |\mathrm{TC}(u)|$ は明白. $\alpha < |\mathrm{TC}(u)|$ に対し $|L_\alpha(u)| = |\mathrm{TC}(u)|$ とする. $|L_{\alpha+1}(u)| = |\mathrm{Def}(L_\alpha(u))| = |L_\alpha(u)| = |\mathrm{TC}(u)|$ (**6.4.3** による). $\lambda \leq |\mathrm{TC}(u)|$ で $\lambda \in \mathrm{Lim}$ とし $\alpha < \lambda \to |L_\alpha(u)| = |\mathrm{TC}(u)|$ とする. $|L_\lambda(u)| = |\bigcup\{L_\alpha(u) | \alpha < \lambda\}| \leq \sum_{\alpha<\lambda} |\mathrm{TC}(u)| = |\mathrm{TC}(u)| \cdot |\lambda| \leq |\mathrm{TC}(u)|^2 = |\mathrm{TC}(u)|$.
ここで，**4.4.10** を利用した. 逆の不等式は明白.

次に，$|\mathrm{TC}(u)| = \beta$ とおき $\alpha = \beta + 1$ とする. $|L_\alpha(u)| = |\mathrm{Def}(L_\beta(u))| = |L_\beta(u)| = |\mathrm{TC}(u)| = \beta = |\alpha|$. $\alpha > \beta$ とし, $|L_\alpha(u)| = |\alpha|$ と仮定せよ. $|L_{\alpha+1}(u)| = |\mathrm{Def}(L_\alpha(u))| = |L_\alpha(u)| = |\alpha| = |\alpha+1|$. $\beta < \lambda \in \mathrm{Lim}$ とし $\alpha < \lambda \to |L_\alpha(u)| = |\alpha|$ とする. $|L_\lambda(u)| = |\bigcup\{L_\alpha(u) | \alpha < \lambda\}| \leq \sum_{\alpha<\lambda} |\alpha| \leq |\lambda| \cdot |\lambda| = |\lambda|$. $\lambda \subseteq L_\lambda(u)$ であるから $|\lambda| \leq |L_\lambda(u)|$. よって $|L_\lambda(u)| = |\lambda|$. ▒

補題 6.8.4 （i） $L_\alpha \subseteq L_\alpha(u)$. （ii） $\mathrm{Trans}(L_\alpha(u))$; $\beta \leq \alpha \to L_\beta(u) \subseteq L_\alpha(u)$. （iii） y, u, α をパラメタとして $y = L_\alpha(u)$ は Δ_1^{ZF} である.

（iv） $\langle L(u), \in\rangle \models \mathrm{ZF}$. （v） $\mathrm{TC}(u)$ が $L(u)$ で整列可能であれば, $\langle L(u), \in\rangle \models \mathrm{AC}$.

証明は **6.6** におけると同様である. (v)については, $L_0(u) = \mathrm{TC}(u)$ が $L(u)$ で整列可能であるというのであるから，それ以後は **6.6** の方法が使えて, $L(u)$ の整列関係を定義することができるのである. ▒

定理 6.8.5 (AC) $V = L(u)$ とする. このとき

$$\aleph_\alpha \geq |\mathrm{TC}(u)| \to 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$ ▨

証明は，$V=L$ や $V=L[u]$ の場合と同様である．$V=L(u)$ の下では AC が使えないから，そして既に **6.8.3** で AC を使用しており，$V=L(u)$ から AC は出ないので **6.8.5** を ZF で行うことはできない．

なお，**6.6.8** に対応して次の結果が証明される．証明は前と同様である．

定理 6.8.6 $L(u)$ は次の 3 条件をみたす最小のクラス M である：

1°) $\mathrm{OR} \subseteq M$, 2°) $\mathrm{Trans}(M) \wedge \langle M, \in \rangle \vDash \mathrm{ZF}$, 3°) $\mathrm{TC}(u) \in M$. ▨

6.9 順序数定義可能性

順序数からの定義可能という概念は，最初ゲーデル(1946 年)が導入し，それにより AC の無矛盾性に対し簡単な別証明が得られるであろうと示唆した．その後，この概念はポストや竹内により再発見され，マイヒル・スコットはゲーデルの予測が正しいことを証明した．このことだけにとどまらず，この概念は進んだ集合論のいくつかの場面に現われるので，ここに略述しておこう．

定義 6.9.1 集合 u が**順序数定義可能**であるとは，集合論言語 $\mathcal{L}$ のある論理式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ とある順序数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とに対し u が

(1) $$u = \{x \mid \varphi(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}$$

と表わされることである．▨

この定義を一見しただけでは，“u が順序数定義可能である”を $\mathcal{L}$ の一つの論理式で記述できるか否かが，換言すれば順序数定義可能な集合たちを全部集めたものがクラスをなすか否かが明らかでない．なぜなら，その要素 u が $\mathrm{Def}(v)$ の場合におけるような $\{x \mid \langle v, \in \rangle \vDash \varphi(x, \cdots)\}$ という形になっていないからである．

定義 6.9.2 $\mathrm{Def}_1(v)$ は，自由変数を丁度 1 個含む $\mathcal{L}$ のある論理式 $\varphi(x)$ によって $u = \{t \in v \mid \langle v, \in \rangle \vDash \varphi(t)\}$ と表わされる集合 u たち全体のクラスである．$\mathrm{Def}(v)$ のときと同様な論法で $u \in \mathrm{Def}_1(v)$ を $\mathcal{L}$ の一つの論理式で表わすことができるから $\mathrm{Def}_1(v)$ は v の部分クラスであり，したがってそれは集合である．▨

$\mathrm{Def}(v)$ の場合と同様にして，$y = \mathrm{Def}_1(v)$, $u \in \mathrm{Def}_1(v)$ は Δ_1^{ZF} である．

定義 6.9.3 $\mathrm{OD}(u) \equiv \exists \alpha [u \in \mathrm{Def}_1(V_\alpha)]$, $\mathrm{OD} = \{u \mid \mathrm{OD}(u)\}$. ▨

補題 6.9.4 $\mathrm{OR} \subseteq \mathrm{OD}$，したがって OD は固有クラスである．

証明 任意の順序数 α をとる．$\alpha \in V_{\alpha+1} - V_\alpha$ であった．$\mathrm{Ord}(x)$ は絶対的

で，V_α は推移的であるから，

$$\alpha=\{x\in V_\alpha|\langle V_\alpha,\in\rangle\models \mathrm{Ord}(x)\}$$

が成り立ち，したがって $\alpha\in\mathrm{Def}_1(V_\alpha)$ である．よって $\alpha\in\mathrm{OD}$. ▨

さしあたっての目標は

(＊) u が順序数定義可能である $\leftrightarrow \mathrm{OD}(u)$

を証明することである．これによって **6.9.1** の後で述べた疑問が氷解する．

補題 6.9.5 クラス OD を整列する全順序関係 $\lessdot$ がクラスとして存在する．

証明 $\mathrm{OD}=\bigcup\{\mathrm{Def}_1(V_\alpha)|\alpha\in\mathrm{OR}\}$ であるから，各 $\mathrm{Def}_1(V_\alpha)$ を整列することができればよい．その方法は **6.3** におけるのと同様である．V_α が整列されているかどうかには依存しない．詳述すれば次のとおり：丁度1個の自由変数をもつ論理式の(ゲーデル集合たちの)全体 F^1 を整列することができる．それを $<$ としよう．このとき $\mathrm{Def}_1(v)$ を整列する関係 $\lessdot_v$ は次のように定義される．

$x\lessdot_v y \leftrightarrow x, y\in\mathrm{Def}_1(v)\wedge\exists u,w[x=\{t\in v|\mathrm{Sat}^1(u,v,t)\}\wedge(u$ は $<$-最小である$)\wedge y=\{t\in v|\mathrm{Sat}^1(w,v,t)\}\wedge(w$ は $<$-最小である$)\wedge u<w]$.

ここで $\mathrm{Sat}^1(u,v,t)$ は $\mathrm{Sat}(u,v,t)$ を自由変数 1 個の論理式に制限したもの，都合よくかきかえたものと考える．

これによって求むる関係 $\lessdot$ は

$x\lessdot y \leftrightarrow x, y\in\mathrm{OD}\wedge\exists\alpha,\beta[x\in\mathrm{Def}_1(V_\alpha)\wedge y\in\mathrm{Def}_1(V_\beta)\wedge\forall\gamma<\alpha(x\notin\mathrm{Def}_1(V_\gamma))\wedge\forall\gamma<\beta(y\notin\mathrm{Def}_1(V_\gamma))\wedge\{\alpha<\beta\vee(\alpha=\beta\wedge x\lessdot_{V_\alpha}y)\}]$

によって得られる．そうして $x\lessdot y$ は集合論言語 $\mathcal{L}$ の論理式(パラメタなしに)として記述でき，ZF において $\lessdot$ が OD を整列することが示される．(宇宙 V での選択公理は使われていないことに注意.) ▨

この結果と OD が固有クラスであることから **3.4.6** により

$$\langle\mathrm{OD},\lessdot\rangle\cong\langle\mathrm{OR},<\rangle$$

である．そこで G を

$$G:\mathrm{OR}\to\mathrm{OD}$$

なる同型写像とする．いま，任意に $u\in\mathrm{OD}$ をとると

(2) $G`\alpha=u$

なる α が一意的に定まる．したがって G を定義する $\mathcal{L}$ の論理式を $\varphi(x,y)$ とすれば，(2)は

$$u=\{t|\varphi(\alpha,t)\}$$

にほかならない．これは(1)なる形をもつから u は順序数定義可能である．

逆に，u が順序数定義可能であるとし u は(1)で表わされているとする．反映定理によれば u と $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対し

$$(3)\quad \begin{cases} u \subseteq V_\beta, \qquad \beta > \alpha_1, \cdots, \alpha_n \\ V_\beta \text{ は } \varphi \text{ を反映する}: t \in V_\beta \text{ に対し} \\ \quad \varphi(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)^{V_\beta} \leftrightarrow \varphi(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \end{cases}$$

なる β が存在する．この際，もう一つの条件

$$(4)\qquad \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathrm{Def}_1(V_\beta)$$

を要求することができる．なぜなら，もしある $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対し(3)，(4)をみたす β が存在しないとすれば，次のようにして不合理が生ずるのである．OR^n の整列関係があるから†，その順序で最初のかかる $\langle\alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle$ をとる．2つの論理式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ と

$\psi(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$: $\langle\gamma_1, \cdots, \gamma_n\rangle$ は(3)，(4)が成立しない最初の n-組である．

(ただし(3)，(4)で $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ と読みかえる．)

とに対し，反映定理を適用すれば

$$\beta > \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \qquad V_\beta \text{ は } \varphi \text{ と } \psi \text{ を反映する}$$

ような β が存在する．よって V_β では $\langle\alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle$ は(3)，(4)が成立しない最初の n-組である．これより各 α_i は V_β でパラメタなしに定義可能であることがわかる．すなわち $\alpha_i \in \mathrm{Def}_1(V_\beta)$．$V_\beta$ は φ を反映するから，このことは $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対し(3)，(4)が成立することを意味し，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ の選び方に反する．よって(3)，(4)を要求することができる．

ところで V_β が φ を反映することから

$$u = \{t \in V_\beta \mid \langle V_\beta, \in\rangle \vDash \varphi(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}$$

であり，(4)により各 α_i に対し

$$\alpha_i = \{s \in V_\beta \mid \langle V_\beta, \in\rangle \vDash \theta_i(s)\}$$

なる論理式 θ_i が存在するから，結局

$$u = \{t \in V_\beta \mid \langle V_\beta, \in\rangle \vDash \exists y_1 \cdots \exists y_n [\varphi(t, y_1, \cdots, y_n) \wedge \\ \forall i (1 \leq i \leq n) \forall s (s \in y_i \leftrightarrow \theta_i(s))]\}$$

となり，$u \in \mathrm{Def}_1(V_\beta)$ であることがわかる．したがって $u \in \mathrm{OD}$．かくて，目標の (*) が証明された．まとめて：

定理 6.9.6 集合 u が順序数定義可能であるための必要十分条件は，$u \in \mathrm{OD}$ なることである．したがって順序数定義可能な集合たち全体の集りはクラ

† 演習問題 III の 8 を用いて定義することができる．

ス OD である．▨

定義 6.9.7 $\mathrm{HOD}=\{x \mid \mathrm{TC}(x)\subseteq \mathrm{OD}\}$.

クラス HOD の要素を**遺伝的順序数定義可能集合**という．▨

補題 6.9.8 Trans(HOD)．すなわち

$$x\in \mathrm{HOD}\wedge y\in x\to y\in \mathrm{HOD}.$$

証明 $\mathrm{TC}(x)\subseteq \mathrm{OD}$, $y\in x$ とする．$x\in \mathrm{TC}(x)$ であるから推移性により $y\in \mathrm{TC}(x)$．よって $\mathrm{TC}(y)\subseteq \mathrm{TC}(x)\subseteq \mathrm{OD}$ (**3.6** 問 2)．▨

この補題により，遺伝的順序数定義可能集合とは，その各要素が遺伝的順序数定義可能で，その要素の要素も遺伝的順序数定義可能で，・・・というように，要素，要素の要素，またその要素，・・・そういうものが**すべて**遺伝的順序数定義可能であるような集合である．

問 1. $\mathrm{OR}\subseteq \mathrm{HOD}\subseteq \mathrm{OD}$ を証明せよ．▨

補題 6.9.9 （i） $\bigcup \mathrm{HOD}\subseteq \mathrm{HOD}$.

（ii） $a\subseteq \mathrm{HOD}\to \bigcup^n a\subseteq \mathrm{HOD}$ $(n=1, 2, \cdots)$†.

（iii） $a\subseteq \mathrm{HOD}\wedge a\in \mathrm{OD}\leftrightarrow a\in \mathrm{HOD}$.

証明 （i） Trans(HOD) より直ちに出る．

（ii） $a\subseteq \mathrm{HOD}$ なら(i)によって $\bigcup^n a\subseteq \bigcup^n \mathrm{HOD}\subseteq \mathrm{HOD}$.

（iii） $\mathrm{TC(a)}=a\cup\bigcup a\cup\bigcup^2 a\cup\cdots$ であるから，(ii) より $\mathrm{TC}(a)\subseteq \mathrm{HOD}$．よって $\mathrm{TC}(a)\subseteq \mathrm{OD}$．ゆえに $a\in \mathrm{HOD}$．逆は明らかである．▨

定理 6.9.10 $\langle \mathrm{HOD}, \in\rangle$ は ZFC の推移モデルである††.

証明 **5.4.1** を利用する．公理(Ⅰ),(Ⅴ),(Ⅵ),(Ⅷ)が成り立つことは **6.1.10** におけると同様である．特に，上の問 1 により $\omega\in \mathrm{HOD}$ である．

公理(Ⅱ)．このためには

（5） $$a,b\in \mathrm{HOD}\to \{a, b\}\in \mathrm{HOD}$$

が示されればよい．$a,b\in \mathrm{HOD}$ なら $\{a, b\}\subseteq \mathrm{HOD}$ なるゆえ **6.9.9** の (iii) によって $\{a, b\}\in \mathrm{OD}$ なることがいえれば(5)が成り立つ．しかしこれは殆ど明白である(問 2)．

公理(Ⅲ) このためには

$$a\in \mathrm{HOD}\to \bigcup a\in \mathrm{HOD}$$

---

† $\bigcup^n a=\bigcup(\bigcup^{n-1}a)$.

†† 別様に記述すると「φ が ZFC の閉公理式ならば

$$\mathrm{ZF}\vdash \varphi^{\mathrm{HOD}}$$

が成り立つ」となる．

がいえればよい．Trans(HOD) により $\bigcup a \subset \mathrm{HOD}$ なるゆえ **6.9.9** (iii)により $\bigcup a \in \mathrm{OD}$ が示されればよい．しかし $a \in \mathrm{OD}$ だから，それはすぐわかる．(問3).

公理(IV) このためには

$$a \in \mathrm{HOD} \to \mathscr{P}(a) \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{HOD}$$

なることが示されればよい．$\mathscr{P}(a) \cap \mathrm{HOD} \subseteq \mathrm{HOD}$ であるから前と同様にして $\mathscr{P}(a) \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{OD}$ がいえればよい．そこで $a \in \mathrm{OD}$ であるから

$$a = \{t \mid \varphi(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_k)\}$$

なる φ と $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ とが存在する．このとき

$$\mathscr{P}(a) \cap \mathrm{HOD} = \{x \mid \forall t(t \in x \to t \in a) \wedge \forall t[t \in \mathrm{TC}(x) \to \exists \alpha(t \in \mathrm{Def}_1(V_\alpha))]\}.$$

これは $\mathscr{L}$ のある論理式 $\psi(x, x_1, \cdots, x_k)$ とあの順序数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ とをもって

$$\{x \mid \psi(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_k)\}$$

と表わすことができる．よって $\mathscr{P}(a) \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{OD}$.

公理(VII) 簡単のため $\varphi(x, y)$ は x, y 以外に自由変数を含まないとする．$x, y, z \in \mathrm{HOD}$ に対し

$$\varphi^{\mathrm{HOD}}(x, y) \wedge \varphi^{\mathrm{HOD}}(x, z) \to y = z$$

とする．よって $\varphi^{\mathrm{HOD}}(x, y)$ は HOD において一つのクラス関数を定める．$u \in \mathrm{HOD}$ に対し集合 v

(6) $$v = \{y \in \mathrm{HOD} \mid \exists x \in u\, \varphi^{\mathrm{HOD}}(x, y)\}$$

が HOD に属することを示せばよい．一般に

(7) $$v \subseteq \mathrm{HOD} \to \exists w \in \mathrm{HOD}[v \subseteq w]$$

すなわち HOD は殆ど宇宙的である．この証明は後回しにして(7)を認めると，(6)なる v に対し

$$v \subseteq w \in \mathrm{HOD}$$

なる w が存在する．よって

$$v = \{y \in w \mid \exists x \in u\, \varphi^{\mathrm{HOD}}(x, y)\}$$

となる．$u \in \mathrm{OD}$ であるからこれより $v \in \mathrm{OD}$. (6)より $v \subseteq \mathrm{HOD}$. ゆえに **6.9.9** により $v \in \mathrm{HOD}$.

(7)の証明：$\rho(v) < \alpha$ とすれば $v \subseteq V_\alpha \cap \mathrm{HOD}$ となるから，$V_\alpha \cap \mathrm{HOD}$ という形の集合が HOD に属することを示せばよい．ところで

$$V_\alpha \cap \mathrm{HOD} = \{x \mid x \in V_\alpha \wedge \forall t \in \mathrm{TC}(x) \exists \beta(t \in \mathrm{Def}_1(V_\beta))\}$$

であるから $V_\alpha \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{OD}$. よって **6.9.9** から $V_\alpha \cap \mathrm{HOD} \in \mathrm{HOD}$.

公理(IX)　**6.9.5** によって OD を整列する全順序関係 $<\!\cdot$ が存在した. $<\!\cdot|\mathrm{HOD}$ は HOD を整列する. よって $\langle \mathrm{HOD}, \epsilon\rangle$ はクラス形整列定理を満足する. $u\in\mathrm{HOD}$ に対し $<\!\cdot|u$ は HOD の部分集合で, OD に属する. なぜなら, $u\in\mathrm{OD}$ なるゆえある $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ と ψ とがあって $u=\{x|\psi(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}$. $x<\!\cdot y$ を定義する論理式を $\varphi(x, y)$ (パラメタなし)とすれば

$$<\!\cdot|u=\{\langle x, y\rangle|\varphi(x, y)\wedge\psi(x, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)\wedge\psi(y, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}$$

となる. これは明らかに OD である. よって **6.9.9** により $<\!\cdot|u\in\mathrm{HOD}$. ゆえに $\langle\mathrm{HOD}, \epsilon\rangle\models\mathrm{AC}$. (この議論で宇宙 V での選択公理は使用されてないことに注意.)

以上で, 公理(I)～(IX)のすべてが $\langle\mathrm{HOD}, \epsilon\rangle$ で満足されることが証明された. ▨

問 2.　$a, b\in\mathrm{OD}\to\{a, b\}\in\mathrm{OD}$.

問 3.　$a\in\mathrm{OD}\to\bigcup a\in\mathrm{OD}$. ▨

定理 6.9.11　　$L\subseteq\mathrm{HOD}$.

証明　L は $\mathrm{Trans}(M)$, $\mathrm{OR}\subseteq M$ なる ZF の最小の ϵ-モデル M である(定理 **6.2.2**). HOD はこの条件をみたす. ▨

この定理によって

$$L\subseteq\mathrm{HOD}\subseteq V$$

であるから

(a)　　$L=\mathrm{HOD}\subsetneqq V$

(b)　　$L\subsetneqq\mathrm{HOD}=V$

(c)　　$L\subsetneqq\mathrm{HOD}\subsetneqq V$

という3つの可能な場合がある. これらのうちのどの場合も ZF と矛盾しないことが知られている. (a)については **7.6.8** を参照されたい.

また L の場合と異なって

(d)　　$\mathrm{HOD}^{\mathrm{HOD}}\neq\mathrm{HOD}$

が ZF と矛盾しないことも知られている. (L では $L^L=L$ が(ZF で)証明されていた.)

演習問題 VI

1.　ZF の最小モデル L_{ξ_0} においては, SM は成立しない: $\langle L_{\xi_0}, \epsilon\rangle\models\neg\mathrm{SM}$.

2.　$\mathrm{SM}(a)$ とは $\exists u[\mathrm{Trans}(u)\wedge a\in u\wedge\langle u, \epsilon\rangle\models\mathrm{ZF}]$ なる主張とする.

ZF+SM(a) の下で，a を要素とする最小の推移 $\in$-モデルは $L_{\eta_0}(a)$ なる形をもつことを示せ．

3.　次を証明せよ．

1)　$L[u]=L(u\cap L[u])$.

2)　$u\subset L\to L[u]=L(u)$ である．したがって特に $u\subseteq\omega\to L[u]=L(u)$.

4.　M を ZF の可算推移モデルで $\langle M,\in\rangle\prec\langle L,\in\rangle$ なるものとする．(かかる M の存在はこれを仮定する．**7.1** をみよ．) **6.4.1** の証明とこの M とを用いて

$$\exists\alpha[(\alpha \text{ は可算順序数})\wedge\mathscr{P}(\omega)\cap(L_{\alpha+1}-L_\alpha)=\phi]$$

が成り立つことを証明せよ．すなわち，$L_{\alpha+1}-L_\alpha$ が“実数”を一つも含まないような可算順序数 α が存在する．

5.　$cf(\kappa)>\omega$ とする．$u\subset\kappa$ が任意の club in κ なる集合と交わるならば，u は κ で**定常である**(stationary)という．混乱がなければ，“κ で”を省略する．

1)　$cf(\kappa)$ より少ない個数の非定常集合たちの和はやはり非定常である．

2)　λ は正則で $\lambda<cf(\kappa)$ とする．$\{\gamma<\kappa\,|\,cf(\gamma)=\lambda\}$ は κ で定常である．

6.　**ダイヤモンド** $\diamondsuit$ とは次の条件をみたす集合の超限列 $\langle u_\alpha\subseteq\alpha\,|\,\alpha<\omega_1\rangle$ が存在するという主張である：$\forall u\subseteq\omega_1[\{\alpha<\omega_1\,|\,u\cap\alpha=u_\alpha\}$ は ω_1 で定常である$]$．かかる $\langle u_\alpha\subseteq\alpha\,|\,\alpha<\omega_1\rangle$ を $\diamondsuit$-**列**という．

$$V=L\to\diamondsuit$$

を証明せよ．$\diamondsuit$ からいろいろな興味ある命題が導かれることが知られている．

7.　$\diamondsuit\to$ CH を証明せよ．

8.　空でない推移集合 u が($\in$-モデルとして)(II)，(III)，**Δ_0-分出公理**，**Δ_0-収集公理**をみたすとき，u は**許容的**であるまたは**許容集合**であるという．ここに，Δ_0-分出公理は公理(VII′)の ψ を Δ_0-論理式(**5.2.1**)に制限したものであり，Δ_0-収集公理は，任意の Δ_0-論理式 $\varphi(x,y)$ に対する次の形の論理式である(一番外側の $\forall$ は全称閉包の意)．

$$\forall\,\forall a[\forall x\in a\,\exists y\varphi(x,y)\to\exists w\forall x\in a\,\exists y\in w\varphi(x,y)].$$

このとき，κ が正則基数ならば L_κ は許容集合であることを証明せよ．(実は κ が無限基数でありさえすれば L_κ は許容集合である．また基数でない沢山の順序数 α に対し L_α が許容集合となることも知られている．)

7

強制法と独立性証明

本章では，ZF が無矛盾であると仮定して AC, GCH, $V=L$ が ZF と独立であることを証明したい．すなわち

$$ZF+\neg AC,\ ZF+AC+\neg CH,\ ZF+AC+GCH+V\neq L$$

それぞれ無矛盾であることである．前章の結果と合せると，結局 " AC, GCH, $V=L$ はどれも今日の集合論公理系 ZF からは正しいとも正しくないとも決定することができない" ということが結論される．よってカントル以来の選択公理や連続体仮説に関する問題はここに一応の決着がみられたことになる．(AC は別として) ZF へ($V=L$ とは異なった)どんなもっともらしい公理を付加したならば，拡大系で CH あるいは GCH を証明することができるかという問題は今後に残された大きな問題の一つであろう．

上記 3 つの命題

$$AC,\quad CH,\quad V=L$$

の独立性はコーヘンによって 1963 年に初めて証明され，当時センセイションを巻き起した．その方法——**強制法**と呼ばれる——は画期的なもので，その強力さはその後数多く発表された強制法にもとづく諸結果が証拠だてている．今日ではそれらの研究者の一部によって整理され当初よりも取り扱いやすくなっている．コーヘンは分岐階層に分類された論理式を用いたが，そのためにかなり複雑な議論が現われた．本書では，ショーンフィールドの解説論文 [22] に従って "非分岐強制法" と呼ばれる方法によって証明を述べる(ソロベイ)．なお，CH の独立性証明は紙数の関係でやむを得ず割愛する．それについては例えば [28] の訳者解説を参照されたい．そこには本書と同じ方針で CH の独立性証明が詳述されている†.

7.1 独立性証明の方法

$V=L$ の ZF との無矛盾性は，それに対するモデル $\langle L, \epsilon\rangle$ の存在によって証明された．L のように，クラス M であって ZF のすべての公理 φ に対し

† なお，本章では集合であってもしばしば大文字を用いることがある．

φ^M が ZF で証明されるものを ZF の**内部モデル**という．われわれのクラスは $\mathcal{L}$ の論理式によって定義されるもので，その意味でいわゆる**定義可能なクラス**である．さてこれと同じ方法で，すなわち内部モデルの方法で例えば $V=L$ の独立性（すなわち $V\neq L$ の無矛盾性）が証明できるであろうか．実はこれがうまくいかないのである．

定理 7.1.1 推移クラス A が ZF の内部モデルならば

(1) $$\langle A, \in\rangle \models V\neq L \quad \text{i.e.} \quad (V\neq L)^A$$

を ZF で証明することは不可能である．

証明 仮りに(1)が ZF で証明できたと仮定しよう．仮定により

(2) φ が ZF の公理ならば，φ^A が成り立つ．

いま，SM を仮定し，L_{η_0} を ZF の最小推移モデルとしよう．$A^{L_{\eta_0}}$ は L_{η_0} の推移部分集合で(2)により

$$\varphi \text{ が ZF の公理} \to (\varphi^A)^{L_{\eta_0}}, \quad \text{すなわち} \quad \varphi^{A^{L_{\eta_0}}}$$

であるから $A^{L_{\eta_0}}$ は ZF の推移モデルである．L_{η_0} の最小性から

(3) $$A^{L_{\eta_0}}=L_{\eta_0}$$

である．ところで $\langle L_{\eta_0}, \in\rangle \models V=L$．これは

(4) $$L_{\eta_0}=L^{L_{\eta_0}}$$

を意味する．仮定(1)により $A\neq L^A$ である．これを L_{η_0} で相対化すれば

$$A^{L_{\eta_0}}\neq L^{A^{L_{\eta_0}}}.$$

これと(3)を用いて

$$L_{\eta_0}\neq L^{L_{\eta_0}}.$$

これは(4)に反する．したがって SM を否定することなしには(1)を ZF で証明することができないことがわかった．▨

$V=L\to \mathrm{AC}\wedge \mathrm{GCH}$ であるから

$$\langle A, \in\rangle \models \neg\mathrm{AC}, \qquad \langle A, \in\rangle \models \neg\mathrm{GCH}$$

も同様に ZF で証明することは期待できない．

それでは AC や CH の独立性を確立するには，どのような手段をとるべきであろうか．考えられるのは，ZF を拡大した体系，例えば

(5) $$\mathrm{ZF}+\mathrm{SM}$$

でこれを行うことであろう．そこでは ZFC のモデルをなす集合 u が存在する．ところが厄介なことに(5)の下では

(6) 非可算集合 u で，$\mathrm{ZFC}+\neg\mathrm{CH}$ や $\mathrm{ZFC}+(\mathcal{P}(\omega)-L\neq\phi)$ のモデルになるものの存在

を証明することができないのである．その理由は次のようである([2])．

いま，u が非可算集合で ZFC のモデルであるとしよう．モストウスキー同型定理によって u は推移集合であるとしてよい．

$$\alpha_0=\mathrm{Index}(u)=\sup\{\alpha\in \mathrm{OR}\,|\,\alpha\in u\}$$

とする．α_0 は非可算順序数でなければならない．[なぜなら，もし α_0 が可算順序数であるとすれば，$u=\bigcup\{u\cap V_\beta\,|\,\beta<\alpha_0\}$ である†から u が非可算なることによりある $\beta<\alpha_0$ が存在して $|u\cap V_\beta|>\aleph_0$ となる．u で AC が成り立つから u の中で $(u\cap V_\beta)^u=u\cap V_\beta$ を整列する全順序 r がある．これに対し $\langle u\cap V_\beta, r\rangle\cong\langle\xi,\in\rangle$ なる順序数 $\xi\in u$ が存在する．$u\cap V_\beta$ の非可算性より $\xi>\alpha_0$．これは α_0 が Index(u) であることに反する．] よって $\alpha_0\geq\aleph_1$，したがって u はすべての可算順序数を含む．**6.5.3** により

$$L_{\aleph_1}\subseteq u.$$

そこで $V=L$ を仮定しよう．すると **6.4.1** の証明により ($\omega\subseteq L_\omega$ と $\mathscr{P}(L_\omega)\subseteq L_{\aleph_1}$ による)

(7)　$$\mathscr{P}(\omega)\subseteq L_{\aleph_1}\subseteq u.$$

これにより u における構成的実数の集合 $(\mathscr{P}(\omega))^{L^u}$ は，現実の実数集合 $\mathscr{P}(\omega)$†† と一致することがわかるから $\aleph_1{}^u=\aleph_1$ でなければならない．よって

$$\langle u,\in\rangle\models\mathscr{P}(\omega)\subseteq L_{\aleph_1},$$

したがって $\langle u,\in\rangle\models\mathrm{CH}$．これらは

$$\langle u,\in\rangle\not\models\mathscr{P}(\omega)-L\neq\phi,\qquad\langle u,\in\rangle\not\models\neg\mathrm{CH}$$

を意味する．ゆえに ZF+SM の下では，$V=L$ から矛盾が生じない限り(6)を証明することができないのである．

したがって独立性の証明のためには**可算モデル**(すなわち可算集合 u をもつ構造 $\langle u,\in\rangle$ で集合論のモデルをなすもの)を使用しなければならないことがわかった．さて，われわれはそこで(5)において議論を展開するのであるが，これは(5)が無矛盾であることを仮定して CH や $V=L$ の独立性を証明することを意味する．しかしなるべくなら，仮定は ZF の無矛盾性のみにしておきたい．よってわれわれは次のことを仮定する：

(＊)　　ZF は無矛盾である．

---

† もし $x\in u-V_{\alpha_0}$ なる x があれば $|\mathrm{TC}(x)|>\alpha_0$ であるから，u の中で TC(x) を整列して上と同様な議論を行えば，不合理が生ずる．よって $u\subseteq V_{\alpha_0}$．これより $u\subseteq\bigcup\{u\cap V_\beta\,|\,\beta<\alpha_0\}$．

†† われわれは $\mathscr{P}(\omega)$ の要素をルーズな意味で“実数”と呼んだ．

前章で学んだように，この条件の下で

(⁂) $\quad$ ZF$+V=L$ は無矛盾である．

よって(⁂)の下で議論を進めてよい．集合論言語 $\mathcal{L}$ へ新しく定数記号 M を加え拡大言語 $\mathcal{L}_1$ をつくる．前章で定義した $\mathcal{L}_1$ と本質的に同じである．導入した述語記号を U の代わりに定数記号 M を用いただけの相違である．前章では言語のみを拡大し公理系はそのままにしておいたが，今回は公理系も拡大する．新公理系を ZFC* で表わす．

定義 7.1.2 ZFC* は言語 $\mathcal{L}_1$ で記述された次の公理系である．

1°) ZFC の公理系．ただし置換公理における論理式 φ は言語 $\mathcal{L}$ の論理式に限定する．

2°) M は空でない集合である：

$$\exists x(x\in M)\wedge\exists y\forall x(x\in M\leftrightarrow x\in y).$$

3°) M は推移的である：$\forall x\forall y(x\in M\wedge y\in x\rightarrow y\in M)$.

4°) φ を言語 $\mathcal{L}$ の文とするとき

$$\varphi\leftrightarrow\varphi^M$$

という形の $\mathcal{L}_1$ の論理式全体．

5°) $V=L$.

ここで φ^M は，φ に現われる $\forall x$，$\exists x$ をそれぞれ $\forall x\in M$，$\exists x\in M$ でおきかえて得られる $\mathcal{L}_1$ の論理式である．▒

ZFC* では φ が ZFC の公理ならば φ^M が成立する．また $V=L$ は $\mathcal{L}$ の文であるから，そして ZFC* の公理であるから $(V=L)^M$ が成立する．

定理 7.1.3 (**保存拡大定理**) ZFC* は ZF$+V=L$ の**保存拡大**である．すなわち φ が $\mathcal{L}$ の論理式であるとき，

$$\text{ZFC*}\vdash\varphi \qquad \text{ならば} \qquad \text{ZF}+V=L\vdash\varphi.$$

証明 仮定により $\mathcal{L}$ の有限個の文 $\psi_1,\cdots,\psi_k$ が存在して

$$(\psi_1\leftrightarrow{\psi_1}^M)\wedge\cdots\wedge(\psi_k\leftrightarrow{\psi_k}^M)\wedge2°)\wedge3°)\wedge5°)\rightarrow\varphi$$

が ZFC の公理のみを用いて証明される．φ は M を含まないから ZF$+V=L$ において

(8) $\quad\exists u[(\psi_1\leftrightarrow{\psi_1}^u)\wedge\cdots\wedge(\psi_k\leftrightarrow{\psi_k}^u)\wedge u\neq\phi\wedge\mathrm{Trans}(u)]\rightarrow\varphi$

が成り立つ．ところが反映定理によって

$$(\psi_1\leftrightarrow{\psi_1}^{V_\beta})\wedge\cdots\wedge(\psi_k\leftrightarrow{\psi_k}^{V_\beta})\wedge V_\beta\neq\phi\wedge\mathrm{Trans}(V_\beta)$$

が成り立つような集合 V_β が存在する．したがって(8)により φ が成り立つ．すなわち ZF$+V=L\vdash\varphi$. ▒

定理 7.1.4 仮定(*)の下で ZFC* は無矛盾である.

証明 ($\ast\atop\ast$)を用いてよい. もし ZFC* が矛盾を導くならば, $\varphi\equiv\phi\in\phi$ も ZFC* で証明される. この φ は $\mathcal{L}$ の文であるから保存拡大定理によって

$$\mathrm{ZF}+V=L \quad\vdash\quad \phi\in\phi.$$

これは ZF+V=L が矛盾することを意味するから($\ast\atop\ast$)に反する. ▨

さて, 上でみたように ZFC* では $\langle M,\in\rangle$ が ZF+V=L の推移モデルになっている. しかも M は**集合**である. 下方, レーヴェンハイム・スコーレムの定理(**5.7.1**)を用いると

(9) $$\langle M',\in\rangle\prec\langle M,\in\rangle$$

なる可算部分構造 M' が求まる. この M' にモストウスキー同型定理を適用すれば

(10) $$\langle A,\in\rangle\cong\langle M',\in\rangle \qquad (\text{同型})$$

なる推移集合 A を求めることができる. (9), (10)によって結局 $\langle A,\in\rangle$ は

$$\mathrm{ZFC}+V=L$$

の **可算推移モデル** であることがわかる. (したがって A はある順序数 α_0 をもって L_{α_0} という形に表わされる.)

以下では, このモデル $\langle A,\in\rangle$ を用いて独立性を論ずる. これによって(ZFC* において)例えば

"ZFC+$V\neq L$ のモデルが存在する"

ことが証明されたならば, このことは "ZFC* が無矛盾ならば ZFC+$V\neq L$ も無矛盾である" ことを意味する. よって **7.1.4** により結局

"ZF が無矛盾ならば, ZFC+$V\neq L$ は無矛盾である"

という最終結果―― V=L の ZF に対する独立性――に到達するわけである.

7.2 強制概念

前節に従って

$$M \quad\models\quad \mathrm{ZFC}+V=L$$

なる可算推移モデル M を一つ固定する. (前節の A の代わりに M とかいた.) $\mathrm{Index}(M)=\alpha_0$ とすれば

$$M=L_{\alpha_0}=L^M$$

である. M を拡大して N をつくり

$$N \quad\models\quad \mathrm{ZFC}+V\neq L$$

となるようにするのが当面の目的である．

定義 7.2.1　最大元 1_P をもつ順序構造 $\langle P, \leq_P, 1_P \rangle$ で P が集合であるものを**強制概念**という．P の要素を**条件**と呼ぶことがある．混乱の生じない限り $\leq_P$, 1_P の代わりに $\leq$, 1 を用いる．この略記法に従って

$$\forall p \in P[p \leq 1]$$

である．$p, q \in P$ に対し，$p \leq q$ のとき p は q の**拡大**であるという．すなわち“小さい”方が拡大である．また $r \leq p \wedge r \leq q$ なる $r \in P$ が存在するとき（すなわち p, q の共通の拡大が存在するとき），p と q は**両立する**という．▧

3-組 $\langle P, \leq, 1 \rangle$ が M の要素であることを $P \in M$ と略記する．そして $\langle P, \leq, 1 \rangle$ が強制概念であるという代わりに P が強制概念であるという．

例 1.　$H(\omega, 2) = \{p \mid p \subset \omega \times 2 \wedge |p| < \aleph_0 \wedge \mathrm{Func}(p)\}$
とし，$p, q \in H(\omega, 2)$ に対し

$$p \leq q \;\equiv\; p \supseteq q$$

と定める．ここに $2 = \{0, 1\}$ である．このとき $\langle H(\omega, 2), \leq, \phi \rangle$（すなわち ϕ が最大元）は M に属する強制概念である．この場合，p, q が両立するのは p, q が関数として $\mathrm{Dom}(p) \cap \mathrm{Dom}(q)$ 上で一致することであり，したがって $p \cup q \in H(\omega, 2)$ であることである．▧

定義 7.2.2　$\langle P, \leq, 1 \rangle$ を強制概念とする．$G \subseteq P$ が次の条件をみたすとき G は P における（または P 上の）**フィルター**であるという．

1°）　$1 \in G$.

2°）　$\forall p \in G \forall q \in P[p \leq q \rightarrow q \in G]$.

3°）　$\forall p, q \in G \exists r \in G[r \leq p \wedge r \leq q]$.

また D が P-**稠密**であるとは，$D \subseteq P$ であって

$$\forall p \in P \exists q \in D[q \leq p]$$

が成り立つことをいう．▧

例 2.　任意の $f \in {}^{\omega}2$ に対し，$G_f = \{p \in H(\omega, 2) \mid \exists n \in \omega[f \restriction n \leq p]\}$ は $H(\omega, 2)$ 上のフィルターである．また $D = \{f \restriction n \mid n \in \omega \wedge f \in {}^{\omega}2\}$ とすれば，D は $H(\omega, 2)$-稠密である．▧

注意　P が強制概念であるとき，各 $p \in P$ に対し P の部分集合 $[p]$ を

$$[p] = \{q \mid q \leq p\}$$

と定義し，

$$O = \{[p] \mid p \in P\} \cup \{\phi\}$$

を近傍系の基として P へ位相を入れる．このとき

（i）　D が P-稠密なら，D は位相空間 P において稠密である：D の閉包$=P$.

(ii) 位相空間 P では任意個の開集合の共通部分が再び開集合となる. ▒

問 1. 上記(i), (ii)を証明せよ. ▒

定義 7.2.3 P を強制概念とする.(実用上は $P \in M$ であるが, 以下の定義はこのことには無関係である.) P 上のフィルター G が次の条件をみたすならば, G は M 上で P-**generic** であるまたは M 上の P-**generic フィルター**であるという.

4°) $\forall D \in M[D: P\text{-稠密} \rightarrow D \cap G \neq \phi]$. ▒

定理 7.2.4 P が強制概念で $p \in P$ ならば, $p \in G$ なる M 上の P-generic フィルター G が存在する.

証明 われわれの M は**可算**モデルであることに注意しよう. よって, M の全要素を ω-タイプに並べることができる. それを

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots \qquad (n \in \omega)$$

とする. 各 $n \in \omega$ に対し $p_n \in P$ を次のように帰納的に定義する:

$$\begin{cases} p_0 = p, \\ p_{n+1} = \begin{cases} q_n & \textit{if} \quad \exists q \in P[q \in a_n \wedge q \leq p_n], \\ p_n & \text{ow}. \end{cases} \end{cases}$$

ここに q_n は $q \in a_n \wedge q \leq p_n$ なる一つの q である. このとき

$$G = \{r \in P \mid \exists n[p_n \leq r]\}$$

とすれば, G は M 上の P-generic フィルターである. 以下その証明: フィルターの性質1°), 2°) は明白. 3°) 任意の $p, q \in G$ をとる. よって $p_n \leq p$, $p_m \leq q$ なる $m, n \in \omega$ がある. $n \leq m$ としてよい. そのとき $p_m \leq p_n$ であるから, $G \ni p_m \leq p, q$. 4°) D を M の要素で P-稠密とする. よってある $n \in \omega$ に対し $D = a_n$. 稠密性により p_n に対し $q \in a_n \wedge q \leq p_n$ なる q がある. ゆえに p_{n+1} の定義により $p_{n+1} \in a_n$. したがって $p_{n+1} \in G \cap D$. ▒

上で構成された M 上の P-generic フィルター G は M 全体にかかわっているので一般には $G \in M$ とならないであろうことが予想できる. これはしかし, P の性質に依存する.

補題 7.2.5 強制概念 P が M の要素であって,

(1) $\qquad \forall p \in P\, \exists q, r \in P[q, r \leq p \wedge (q, r \text{ は両立しない})]$

なる条件がみたされるならば, M 上の P-generic フィルターは M の要素でない.

証明 G をかかる任意のフィルターとする. もし $G \in M$ ならば, $D = P - G$ は M の要素である(差は絶対的演算だからである). 任意の $p \in P$ に対し(1)

なる q, r をとると G がフィルターだから $q \notin G$ または $r \notin G$，すなわち $q \in D$ または $r \in D$. よって p は D の中に拡大をもつ. ゆえに D は P-稠密である. したがって $G \cap D \neq \phi$ であるが，これは $D = P - G$ と矛盾する. よって $G \notin M$ でなければならない. ▨

例1の強制概念 $H(\omega, 2)$ は条件(1)をみたすから M 上の $H(\omega, 2)$-generic フィルターは M の要素ではない.

補題 7.2.6　G が M 上の $H(\omega, 2)$-generic フィルターならば，$\bigcup G$ は ω から2への全域関数である. したがってそれは ω のある部分集合を表わす.

証明　$f = \bigcup G$ とおく. すなわち

$$\langle x, y\rangle \in f \leftrightarrow \exists p \in G[p`x = y].$$

$\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle x, y'\rangle \in f$ とせよ. $p`x = y$, $q`x = y'$ なる $p, q \in G$ がある. $r \leq p, q$ なる $r \in G$ をとると $y = r`x = y'$. よって，$f$ は関数である. そこで任意の $x \in \omega$ をとる. $\{p \in H(\omega, 2) \mid x \in \mathrm{Dom}(p)\}$ は $P$-稠密であるから，$p \in G \wedge x \in \mathrm{Dom}(p)$ なる $p$ がある. よって $\langle x, p`x\rangle \in f$. よって $\mathrm{Dom}(f) = \omega$ である. ▨

問 2.　上の f が現わす ω の部分集合は空でもなく ω にも等しくないことを示せ. ▨

7.3　generic 拡大モデル

本節では，**generic 拡大モデル**または**コーヘンモデル**と呼ばれる(M の)拡大モデルを定義する. $P \in M$ なる強制概念 P をとり，前節で存在が保証された M 上の P-generic フィルター G をとる[臨時に固定しておく]. ZFC に対する可算推移モデル $M[G]$ で条件

1°)　$M \subseteq M[G]$,

2°)　$\mathrm{OR} \cap M = \mathrm{OR} \cap M[G]$,

3°)　$G \in M[G]$

をみたすものを構成する†. $M[G]$ は G を要素として含む ZFC の可算推移モデルで M の拡大であるような最小のモデルとなるであろう. P が前節の条件(1)をみたすときは $G \notin M$ であるから，$M \subsetneq M[G]$ となるわけである.

さて，任意の集合 x に対し

(1)　　　$\mathrm{val}(x, G) = \{\mathrm{val}(y, G) \mid \exists p \in G[\langle y, p\rangle \in x]\}$††

---

† 第6章の記法 $L[u]$ に幾分抵触するが，習慣上，記法 $M[G]$ を用いる. 一般に N が ZFC のモデルであり，A が N の部分集合であるとき，$N \subseteq N'$, $\mathrm{OR} \subset N = \mathrm{OR} \cup N'$, $A \in N'$ をみたす最小の ZFC モデル N' が存在するならば，それを $N[A]$ で表わす. 上の $M[G]$ は $G \subset M$ であるから，この意味での $M[G]$ になっている.

†† val は valuation に由来する.

と定義する．この定義が合法的であることを示そう．簡単のため

$$y \in_G x \equiv \exists p \in G[\langle y, p\rangle \in x]$$

と定める．よって(1)は

(1′) $$\mathrm{val}(x, G)=\{\mathrm{val}(y, G) \mid y \in_G x\}$$

となる．

(2) $$y \in_G x \to \rho(y)<\rho(x)$$

であるから，$\in_G$ の x による切片 $\{y \mid y \in_G x\}$ は $V_{\rho(x)}$ の部分クラスとして集合である．また $\forall n \in \omega(x_{n+1} \in_G x_n)$ なる無限下降列 $\{x_n \mid n \in \omega\}$ は存在しない．なぜならもしかかる $\{x_n \mid n \in \omega\}$ があれば，順序数の無限下降列 $\forall n(\rho(x_{n+1})<\rho(x_n))$ が生じてしまうから不合理となる．かくて $\in_G$ は有基底的関係である．よって $\in_G$ に関する超限帰納的定義が可能である．すなわちクラス関数 $A=\{\langle\langle x, v\rangle, u\rangle \mid u=\mathrm{Rng}(v)\}$ に対し

$$F: V \to V$$
$$F`x = A`\langle x, F\restriction\{y \mid y \in_G x\}\rangle$$

なるクラス関数 F が一意的に定まる．このとき

$$F`x = \mathrm{val}(x, G)$$

である．これで定義(1)が合法的であることがわかった．

また $x \in M$ で $\langle y, p\rangle \in x$ なら $y \in \mathrm{TC}(x)$ であり，M は推移的であるから，$y \in M$ となる．よって

(3) $$x \in M \wedge \mathrm{val}(y, G) \in \mathrm{val}(x, G) \to y \in M$$

となる．そこで次のように定義する．

定義 7.3.1 P を M に属する強制概念，G を M 上の P-generic フィルターとする．このとき

$$M[G]=\{\mathrm{val}(x, G) \mid x \in M\}$$

と定義する．$M[G]$ を（G による）M の **generic 拡大モデル**（または単に，**generic モデル**と略称することもある）といい，これに対し M を**基礎モデル**という†．▨

$M[G]$ の各要素はそれが G からどのようにして構成されるかを指示するものを M の中にもっているということができる．そこで $M[G]$ の要素 $\mathrm{val}(x, G)$ に対し M の要素 x をその**名前**という．

以下では，上の定義における P, G を固定し，$M[G]$ に関する主要な基本

† 後節で $M[G]$ を基礎モデルとして更にそれを generic 拡大することを取り扱う．その意味で基礎モデルという用語は便利である．

性質を調べる．

補題 7.3.2　$M[G]$ は可算集合でしかも推移的である．

証明　x に対し $\mathrm{val}(x, G)$ は一意的に定まる．M が可算で $x \in M$ であるから $M[G]$ は可算集合である．また(1)と(3)によって $\mathrm{Trans}(M[G])$ である． ▒

補題 7.3.3　$M \subseteq M[G]$．

証明　$a \in M$ に対し

$$\check{a} = \{\langle \check{x}, 1 \rangle \mid x \in a\}$$

と定義する†．ここに 1 はもちろん P の最大元である．これは M における $\rho(a)$ に関する超限帰納的定義(**3.6**)であるから，関数

$$a \mapsto \check{a}$$

は M で定義可能なクラス関数であり††，特に $\check{a} \in M$ である．このとき

(4)　$$\mathrm{val}(\check{a}, G) = a$$

が成り立つ．したがって $M \subseteq M[G]$ である．以下(4)の証明：$a \in M$ とし $\in$-帰納法の仮定として

$$\forall x \in a[\mathrm{val}(\check{x}, G) = x]$$

と仮定する．これによって

$$x \in a \to \langle \check{x}, 1 \rangle \in \check{a} \to \mathrm{val}(\check{x}, G) \in \mathrm{val}(\check{a}, G) \to x \in \mathrm{val}(\check{a}, G)$$

であるから $a \subseteq \mathrm{val}(\check{a}, G)$．逆に，$x \in \mathrm{val}(\check{a}, G)$ ならば，$\exists p \in G[\langle y, p \rangle \in \check{a}]$ なるある y をもって $x = \mathrm{val}(y, G)$ と表わされる．$\check{a}$ の定義からある z に対し $y = \check{z} \wedge \langle \check{z}, 1 \rangle \in \check{a}$ でなければならぬ．したがって $z \in a$．帰納法の仮定を使って $x = \mathrm{val}(\check{z}, G) = z$．ゆえに $x \in a$，したがって $\mathrm{val}(\check{a}, G) \subseteq a$． ▒

$\check{a}$ は今後しばしば現われる重要な概念である．要するにそれは M の要素 a を $M[G]$ の要素と考えたときの名前である．

問 1.　次の事実をチェックせよ．1)　$\check{0} = 0$,　2)　$\{0\}^{\vee} = \{\langle 0, 1_P \rangle\}$．ただし 0 は空集合 ϕ のことである． ▒

補題 7.3.4　$G \in M[G]$．

証明　$g = \{\langle \check{p}, p \rangle \mid p \in P\}$ をつくる．${}^{\vee}\restriction P \in M$ であり順序対は絶対的であるから $g \in M$ である．

$$x \in_G g \quad \leftrightarrow \quad \exists p \in G[x = p]$$

---

†　$\check{a}$ を a の P-名前という．

††　**5.4** の脚註参照．ここでは M が集合であるから M で定義可能なクラスは M の外からみれば実は集合である．

となるから(4)を用いて

$$\mathrm{val}(g,G)=\{\mathrm{val}(x,G)\mid x\in_G g\}=\{\mathrm{val}(p,G)\mid p\in G\}=\{p\mid p\in G\}=G.$$

よって $G\in M[G]$. ▒

$M[G]$ は ZFC のモデルをなすが，そのことを証明するにはいくつかの準備が必要である．まず，$M[G]$ を考える上で便利な言語を導入する．

定義 7.3.5 M 上の**強制言語** $\mathscr{F}$ (M を明示したいときは $\mathscr{F}(M)$ とかく) とは，次のような記号系と形成規則をもつ系である．

(i) 記号系　論理記号は $\neg$(否定)，$\vee$(あるいは)，$\exists$(存在する)．述語記号は $\in$ (所属関係)，$\neq$(等号の否定)．定数記号は M の各要素．変数記号は v_0, v_1, v_2, $\cdots$. (実用上は超記号を用いて表わす．)

(ii) 形成規則(論理式の定義)

1°) s, t が変数か M の要素ならば，$s\in t$ と $s\neq t$ は論理式である (原子論理式).

2°) φ, ψ が論理式ならば，$\neg\varphi$ と $\varphi\vee\psi$ は論理式である．

3°) φ が論理式で x が変数ならば，$\exists x\varphi$ は論理式である．

4°) 以上によって得られたもののみが論理式である．

自由変数，束縛変数の定義は前と同様．自由変数を含まない論理式(定数記号は含んでもよい)を**文**という．▒

等号でなく等号の否定を原始記号に選んだ理由は，次の強制法の定義の簡単化のためである．$\neg(a\neq b)$ を $a=b$ と略記する．

定義 7.3.6 (**強制**関係の定義)　P の要素 p と $\mathscr{F}$ の文 φ との間の関係

$$p\Vdash\varphi \qquad (p\text{ は }\varphi\text{ を}\textbf{強制する})$$

を次のように定義する．ここで a, b, c は M の要素を，また p, q は P の要素を表わす．

1°) $p\Vdash a\in b \equiv \exists c\exists q\geq p[\langle c,q\rangle\in b\wedge p\Vdash a=c]$.

2°) $p\Vdash a\neq b \equiv \exists c\exists q\geq p[\langle c,q\rangle\in a\wedge p\Vdash \neg(c\in b)]$
$\qquad\qquad\qquad \vee\ \exists c\exists q\geq p[\langle c,q\rangle\in b\wedge p\Vdash \neg(c\in a)]$.

3°) $p\Vdash \neg\psi \equiv \forall q\leq p\neg(q\Vdash\psi)$.

4°) $p\Vdash\psi_1\vee\psi_2 \equiv p\Vdash\psi_1\vee p\Vdash\psi_2$.

5°) $p\Vdash \exists x\psi(x) \equiv \exists b[p\Vdash\psi(b)]$. ▒

なお，上の**定義**の右辺で(記号 $\Vdash$ の右辺以外のところに)使われている論理記号や $\in$ は集合論言語におけるものである．

具体例をみてみよう．ここでは，空集合を 0 で表わすことにする．**任意の**

$p\in P$ と**任意の** $a\in M$ とに対し1°)により自明的に

$$\neg[p\Vdash a\in 0]\qquad (\text{i.e.}\quad \neg[p\Vdash a\in \check{0}]).$$

したがって3°)によって，任意の p に対し

$$p\Vdash \neg(a\in 0)\qquad (\text{i.e.}\quad p\Vdash \neg(a\in \check{0})).$$

また任意の p に対し2°)によって自明的に

$$\neg[p\Vdash (0\neq 0)].$$

よって3°)により任意の p に対し

$$p\Vdash \neg(0\neq 0)\qquad \text{すなわち}\qquad p\Vdash 0=0.\ (\text{i.e.}\quad p\Vdash \check{0}=\check{0}).$$

また，$\mathscr{F}$ の任意の文 φ と P の任意の元 p とに対し，$p\Vdash\varphi$ かつ $p\Vdash\neg\varphi$ となることはない．これは3°)から直ちにわかる事実である．

問 2.　任意の p に対し次の関係が成り立つことを示せ．

1)　$p\Vdash \check{0}\in\{0\}^{\vee}$,　　2)　$p\Vdash \check{0}\neq\{0\}^{\vee}$. ▨

さてわれわれは，上の定義が合法的であることを示さなければならない．まず $a\neq b$ なる形の原子文に対する強制関係をみてみよう．詳しく記述すると

$$p\Vdash a\neq b$$

$$\leftrightarrow\ \exists c\,\exists q\geq p[\langle c,q\rangle\in a\wedge \forall r\leq p\,\forall d\,\forall s\geq r(\langle d,s\rangle\in b\rightarrow \exists t\leq r[t\Vdash c\neq d])]$$

$$\vee\ \exists c\,\exists q\geq p[\langle c,q\rangle\in b\wedge \forall r\leq p\,\forall d\,\forall s\geq r(\langle d,s\rangle\in a\rightarrow \exists t\leq r[t\Vdash c\neq d])]$$

である．$p\Vdash a\neq b$ を定義するのに必要な $t\Vdash c\neq d$ において

$$t\leq p,\qquad \begin{matrix}\rho(c)<\rho(a)\vee\rho(c)<\rho(b)\\ \rho(d)<\rho(b)\vee\rho(d)<\rho(a)\end{matrix}$$

が成り立つ．ゆえに，これは $\max(\rho(a),\rho(b))$ についての超限帰納的定義になっている．それは **3.8** の末尾に述べたものの一般化である．正式には関係 $p\Vdash a\neq b$ の特性関数を M における超限帰納的定義によって定義しなければならない．そこでいま，非反射的関係 R を

$$\langle p,x',y'\rangle R\langle p,x,y\rangle$$
$$\equiv p,p'\in P\wedge x,y,x',y'\in M\wedge \max(\rho(x'),\rho(y'))<\max(\rho(x),\rho(y))$$

によって定義すると，R は M における有基底的関係(したがって M で定義可能なクラス)である．なぜなら，max や ρ が絶対的概念だからである．よって M において R に関し超限帰納的定義が可能となる．前のように

$$\mathrm{Seg}_R(\langle p,a,b\rangle)=\{\langle q,x,y\rangle\mid\langle q,x,y\rangle R\langle p,a,b\rangle\}$$

とおく．

$$F`\langle p,a,b\rangle=\begin{cases}1 & \text{if}\quad (*)\\ 0 & \text{ow},\end{cases}$$

とする．ここに(*)は次の式である．

$$\exists c\exists q\geq p[\langle c, q\rangle\in a\wedge\forall r\leq p\forall d\forall s\leq r(\langle d, s\rangle\in b\rightarrow\exists t\leq r[F`\langle t, c, d\rangle=1])]$$
$$\vee\exists c\exists q\geq p[\langle c, q\rangle\in b\wedge\forall r\leq p\forall d\forall s\leq r(\langle d, s\rangle\in a\rightarrow\exists t\leq r[F`\langle t, c, d\rangle=1])].$$

このとき $a, b\in M$, $p\in P$ に対し

$$\begin{cases}F`\langle p, a, b\rangle=1\leftrightarrow p\Vdash a\neq b\\ F`\langle p, a, b\rangle=K`\langle\langle p, a, b\rangle, F\upharpoonright\mathrm{Seg}_R(\langle p, a, b\rangle)\rangle\end{cases}$$

となるような M で定義可能なクラス K を求めることができる．よって

$$\{\langle p, a, b\rangle|p\Vdash a\neq b\}$$

は M で定義可能なクラスとして存在することがわかった．

問 3. 上記 K を記述せよ．▨

次に $p\Vdash a\in b$ の定義は $p\Vdash a\fallingdotseq c$ によって定義されているからよろしい．既に ψ_i $(i=0, 1)$ に対し

$$\{\langle p, a_1, \cdots, a_n\rangle\in M|p\Vdash\psi_i(a_1, \cdots, a_n)\}$$

が M で定義可能なクラスであることが示されていれば，次のものも M で定義可能なクラスである：

$$\{\langle p, a_1, \cdots, a_n\rangle\in M|q\Vdash\neg\psi_1(a_1, \cdots, a_n)\}$$
$$=\bigcap\{\langle q, a_1, \cdots, a_n\rangle\in M|q\Vdash\psi_1(a_1, \cdots, a_n)\}^C$$

（ここに右肩の C は $P\times\overbrace{M\times\cdots\times M}^{n}$ に関する補集合演算を表わす．）

$$\{\langle p, a_1, \cdots, a_n\rangle\in M|p\Vdash\psi_1(a_1, \cdots, a_n)\vee\psi_2(a_1, \cdots, a_n)\}$$
$$=\{\langle q, a_1, \cdots, a_n\rangle\in M|q\Vdash\psi_1(a_1, \cdots, a_n)\}\bigcup\{\langle q, a_1, \cdots, a_n\rangle\in M|$$
$$q\Vdash\psi_2(a_1, \cdots, a_n)\}$$

$$\{\langle p, a_2, \cdots, a_n\rangle\in M|p\Vdash\exists x\psi_1(x, a_2, \cdots, a_n)\}$$
$$=\bigcup\{\langle p, a_2, \cdots, a_n\rangle\in M|b\in M\wedge p\Vdash\psi_1(b, a_2, \cdots, a_n)\}.$$

かくて次の補題が得られた．

補題 7.3.7 **（定義可能性補題）** $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ は $x_1, \cdots, x_n$ 以外に自由変数を含まない $\mathscr{F}$ の論理式とする．このとき，

$$\{\langle p, a_1, \cdots, a_n\rangle\in M|p\Vdash\varphi(a_1, \cdots, a_n)\}$$

は M で定義可能なクラスである．特に固定した $a_1, \cdots, a_n\in M$ に対しては

$$\{p\in P|p\Vdash\varphi(a_1, \cdots, a_n)\}$$

は M の集合である．▨

補題 7.3.8 **（拡大補題）** φ が言語 $\mathscr{F}$ の文であるとき

$$(p\Vdash\varphi)\wedge r\leq p\quad\rightarrow\quad r\Vdash\varphi$$

証明 $\Vdash$ の定義に従う帰納法による．$(p\Vdash\varphi)\wedge r\leq p$ とする．

(i) φ が $a\in b$ または $a\fallingdotseq b$ であるとき．$p\Vdash\varphi$ の定義中に P の元は

$\exists q \geq p \cdots$ なる形で現われるから，$r \leq p$ ならもちろん $\exists q \geq r \cdots$ が成り立つ．

（ii）　φ が $\neg\psi$ のとき．$\forall q \leq p \neg (q \Vdash \psi)$ である．$r \leq p$ よりもちろん $\forall q \leq r \neg (q \Vdash \psi)$ が成り立っている．

（iii）　φ が $\psi_1 \vee \psi_2$ または $\exists x \psi(x)$ のとき．帰納法の仮定により直ちに $r \Vdash \varphi$ なることがわかる．▒

以下では簡単のため(一定の G が使われている限り)

$$\mathrm{val}(a, G) \quad を \quad \bar{a}$$

と略記する．したがって $a \in M$ に対し

$$\bar{a} = \{\bar{x} \mid x \in_G a\}$$

である．言語 $\mathcal{F}$ の文 φ と $p \in P$ とに対し

$$M[G] \Vdash \varphi$$

とは，M の元 a を $\bar{a}$ で解釈し，$\in$，$\fallingdotseq$，論理記号は普通に解釈して φ が成り立つことであると定める．もちろん $\exists x \psi(x)$ の $\exists x$ は $\exists x \in M[G] \cdots$ の意であり，したがって $\exists \bar{a} \cdots$ と表わすことができる．ただし $a \in M$ である．

例 1.　$a, b \in M$ に対し $M[G] \vDash a \in b$ とは $\bar{a} \in \bar{b}$ のことであり，$M[G] \vDash \check{a} \in \check{b}$ とは $a \in b$ のことである．なぜなら $\bar{\check{a}} = a$ であるからである．また $M[G] \vDash \neg \exists x (x \in \check{0})$ とは $\forall a \in M (\bar{a} \notin 0)$ である．▒

問 4.　次のことをチェックせよ．$M[G] \vDash 0 \in \{0\}^{\vee}$ であるが，$M[G] \vDash 0 \in \{0\}$ ではない．▒

補題 7.3.9（真実性補題）　G が M 上の P-generic フィルターで，φ が $\mathcal{F}$ の文であるとき，

（5）　$$M[G] \vDash \varphi \leftrightarrow \exists p \in G [p \Vdash \varphi]$$

証明　φ の構成に関する帰納法によってこれを証明する．まず帰納法の仮定として利用するために次のことを証明しておく．

（$*$）　(5) $\rightarrow$ (6)

ここに(6)とは次の式である：

（6）　$a \in_G b \wedge M[G] \vDash \varphi \leftrightarrow \exists p \in G \exists q \geq p [\langle a, q \rangle \in b \wedge p \Vdash \varphi]$.

そのため(5)を仮定し(6)の左辺が成り立つとする．$\langle a, q \rangle \in b$ なる $q \in G$ があり，(5)によって $r \Vdash \varphi$ なる $r \in G$ がある．$p \leq q, r$ なる $p \in G$ をとれば拡大補題により $p \Vdash \varphi$ であるから(6)の右辺が成り立つ．逆に(6)の右辺を仮定すれば，あのような $p \in G$，q がある．$q \in G$ である．よって $a \in_G b$ がいえる．また(5)により $M[G] \vDash \varphi$．よって(6)の左辺が成り立つ．これで($*$)が証明された．

そこで(5)を証明する．

1°) φ が $a \in b$ であるとき．（この 1°)と次の 2°)では $\max(\rho(a), \rho(b))$ に関する同時超限帰納法が使われる．）$M[G] \models a \in b$ とする．よって $\bar{a} \in \bar{b}$. $c \in_G b \wedge \bar{a} = \bar{c}$ なる c があるからこれに対し $M[G] \models a = c$. すなわち $M[G] \models \neg(a \neq c)$. 帰納法の仮定と(*)とから

(7) $$p \in G \wedge q \geq p[\langle c, q\rangle \in b \wedge p \Vdash \neg(a \neq c)]$$

なる p, q が存在する．これは $\exists p \in G[P \Vdash a \in b]$ を意味する．逆にかかる p があれば，(7)なる q, c が存在する．帰納法の仮定と(*)とにより $c \in_G b \wedge M[G] \models a = c$ である．よって $\bar{a} = \bar{c}$，したがって $\bar{a} \in \bar{b}$. ゆえに $M[G] \models a \in b$.

2°) φ が $a \neq b$ である．$M[G] \models a \neq b$ とする．$\bar{a} \neq \bar{b}$ であるから

$$c \in_G b \wedge \bar{c} \notin \bar{a} \qquad \text{または} \qquad c \in_G a \wedge \bar{c} \notin \bar{b}$$

なる c がある．このとき $M[G] \models c \notin a$ または $M[G] \models c \notin b$ となるから帰納法の仮定と(*)とから

$$\exists p \in G \exists q \geq p[\langle c, q\rangle \in b \wedge p \Vdash \neg(c \in a)] \vee \exists p \in G \exists q \geq p$$
$$[\langle c, q\rangle \in a \wedge p \Vdash \neg(c \in b)].$$

したがって $\exists p \in G[p \Vdash a \neq b]$. 今の議論は逆にたどれるから，この場合(5)が成り立つ．

3°) φ が $\neg\psi$ である．帰納法の仮定を用いて

(8) $M[G] \models \neg\psi \leftrightarrow M[G] \not\models \psi \leftrightarrow \neg \exists p \in G[p \Vdash \psi] \leftrightarrow \forall p \in G \neg[p \Vdash \psi]$.

そこで $D = \{q | q \Vdash \psi \vee q \Vdash \neg\psi\}$ とすれば，定義可能性補題によって $D \in M$. 容易にわかるように D は P-稠密であるから，$G \cap D \neq \phi$. よって $q \in G \cap D$ なる q を一つとる．したがって

$$q \in G, \qquad q \Vdash \psi \vee q \Vdash \neg\psi.$$

$M[G] \models \neg\psi$ とすると(8)により $\forall p \in G \neg[p \Vdash \psi]$ であるから $q \Vdash \neg\psi$ でなければならない．すなわち $\exists q \in G[q \Vdash \neg\psi]$. 逆にかかる q があれば，$\forall r \leq q \neg(r \Vdash \varphi)$ である．もし $p \in G \wedge p \Vdash \psi$ なる p があれば，$r \leq p, q$ なる $r \in G$ が存在するからこの r に対し $r \Vdash \psi$ となり不合理．よって $\forall p \in G \neg(p \Vdash \psi)$ でなければならない．したがって(8)により $M[G] \models \neg\psi$.

4°) φ が $\psi_1 \vee \psi_2$ である．この場合は容易であるから，読者の演習にゆだねる．

5°) φ が $\exists x \psi(x)$ である．$M[G] \models \varphi$ とすると $a \in M$, $M[G] \models \psi(a)$ なる a がある．帰納法の仮定により $p \in G \wedge p \Vdash \psi(a)$ なる p がある．ゆえに $p \Vdash \exists x \psi(x)$. 逆もそのままたどれる．▨

強制関係 $\Vdash$ の定義自体は $M[G]$ とは無関係であった．次に直接 $M[G]$ の解釈に関係して定義される一種の強制関係を定義しよう．

定義 7.3.10 φを $\mathscr{F}$ の文とし $p \in P$ とする．関係 $p \Vdash^* \varphi$ を

$$p \Vdash^* \varphi \equiv \forall G[(G \text{ は } M \text{ 上の } P\text{-generic フィルター}) \wedge p \in G \to M[G] \vDash \varphi]$$

によって定義し，pはφを**弱強制する**という．▨

定義によって

$$p \Vdash^* \neg\neg\varphi \leftrightarrow p \Vdash^* \varphi$$

である．$\Vdash^*$ と $\Vdash$ とは次の補題によって結びつけられる．

補題 7.3.11 $\mathscr{F}$ の文φと $p \in P$ とに対し

$$p \Vdash^* \varphi \leftrightarrow p \Vdash \neg\neg\varphi.$$

証明 $p \Vdash \neg\neg\varphi$ とする．$p \in G$ なる任意のM上の P-generic フィルター G をとると，真実性補題により $M[G] \vDash \neg\neg\varphi$，すなわち $M[G] \vDash \varphi$．したがって定義により $p \Vdash^* \varphi$．逆に $p \Vdash \neg\neg\varphi$ でないとすると，$\neg\forall q \leq p \neg(q \Vdash \neg\varphi)$．よって $q \leq p \wedge q \Vdash \neg\varphi$ なるqがある．$q \in G$ なるM上の P-generic フィルター G が存在する．このとき真実性補題により $M[G] \vDash \neg\varphi$，すなわち $M[G] \nvDash \varphi$．フィルターの性質により $p \in G$ である．よってM上の P-generic フィルター G で $p \in G$ なるものが存在して $M[G] \nvDash \varphi$．これは $\neg(p \Vdash^* \varphi)$ を意味する．▨

$p \Vdash \varphi$ ならば $p \Vdash \neg\neg\varphi$ であるからこの補題によって

$$p \Vdash \varphi \quad \to \quad p \Vdash^* \varphi$$

となる．この意味で $\Vdash^*$ は，**弱い**強制関係であるといえる．さらにまたこの補題によって弱強制関係 $\Vdash^*$ についても 3 つの補題 **7.3.7**, **7.3.8**, **7.3.9** が成り立つことがわかる．なぜなら，それぞれの補題においてφの代わりに $\neg\neg\varphi$ を用いればよいからである．改めて述べるならば：

補題 7.3.7 a **(定義可能性補題)** $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ が $x_1, \cdots, x_n$ のみを自由変数としてもつ $\mathscr{F}$ の論理式ならば

$$\{\langle p, a_1, \cdots, a_n \rangle \in M \mid p \Vdash^* \varphi(a_1, \cdots, a_n)\}$$

はMで定義可能なクラスである．特に各固定した $a_1, \cdots, a_n \in M$ に対し

$$\{p \in P \mid p \Vdash^* \varphi(a_1, \cdots, a_n)\}$$

はMの集合である．▨

補題 7.3.8 a **(拡大補題)** φが $\mathscr{F}$ の文であるとき

$$p \Vdash^* \varphi \wedge q \leq p \to q \Vdash^* \varphi. \quad ▨$$

補題 7.3.9 a **(真実性補題)** φが $\mathscr{F}$ の文で G がM上の P-generic フィ

ルターならば,

$$M[G]\models\varphi \leftrightarrow \exists p\in G[p\Vdash^*\varphi].$$ ▨

問 5. $\mathscr{F}$ の文 φ に対し

$$p\Vdash^*\neg\varphi\leftrightarrow\forall q\leq p\neg(q\Vdash^*\varphi)$$

が成り立つことを確かめよ．よって否定に対する弱強制は強制の定義と同じ形をもつ．▨

7.4 Generic モデルと ZFC

本節では，前節で導入された generic モデル $M[G]$ が ZFC の公理を満足することを証明する．そこで ZFC の公理系を再掲しよう．強制関係を利用するので，$\mathscr{L}$ の言葉で記述された論理式は強制言語 $\mathscr{F}$ で記述した論理式の略記であると考える．例えば $z\subseteq x$ は $\mathscr{L}$ では $\forall t(t\in z\to t\in x)$ であるが，$\mathscr{F}$ では $\neg\exists t\neg[\neg(t\in z)\vee t\in x]$ の略記であると考える．

ZFC の公理

(Ⅰ) $\forall x\forall y[x=y\leftrightarrow\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)]$

(Ⅱ) $\forall x\forall y\exists z\forall t[t\in z\leftrightarrow t=x\vee t=y]$

(Ⅲ) $\forall x\exists y\forall z[z\in y\leftrightarrow\exists u(u\in x\wedge z\in u)]$

(Ⅳ) $\forall x\exists y\forall z[z\in y\leftrightarrow z\subseteq x]$

(Ⅴ) $\exists x\forall y\neg(y\in x)$

(Ⅵ) $\exists x[0\in x\wedge\forall y(y\in x\to y\cup\{y\}\in x)]$

(Ⅶ) $\forall[\forall x\forall y\forall z(\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,z)\to y=z)\to$
$\forall u\exists v\forall y(y\in v\leftrightarrow\exists x\in v\varphi(x,y))]$

((Ⅶ′) $\forall[\forall u\exists v\forall x(x\in v\leftrightarrow x\in u\wedge\psi(x))]$)

(Ⅷ) $\forall x[x\neq 0\to\exists y\in x(y\cap x=0)]$

(Ⅸ) $\forall z[\forall x(x\in z\to x\neq 0)\wedge\forall x,y\in z(x\neq y\to x\cap y=0)$
$\to\exists u\forall x(x\in z\to\exists t[u\cap x=\{t\}])]$

ここで (Ⅶ), (Ⅶ′) における φ, ψ は $\mathscr{F}$ の論理式，外側の $\forall$ は全称閉包を表わす．▨

さて，P を M に属する強制概念，G を M 上の P-generic フィルターとする．このとき $M[G]$ が推移的集合であることは既に知っている．よって **5.4.1** が適用可能である．ゆえに直ちに

$$M[G]\models(\mathrm{I})\wedge(\mathrm{V})\wedge(\mathrm{VI})\wedge(\mathrm{VIII})$$

なることがわかる．(Ⅵ)は $\omega\in M\subseteq M[G]$ だからである．以下で，残りの公

理が $M[G]$ で成り立つことを証明する．

(II)　任意に $\bar{a}, \bar{b} \in M[G]$ をとる．よって $a, b \in M$ であるから，$c=\{\check{a}, \check{b}\} \in M$ である．このとき $\bar{c} \in M[G]$ であって

$$\bar{c}=\{\bar{x} \mid x \in_G c\}=\{\bar{a}, \bar{b}\}$$

となる．よって $M[G]$ は **5.4.1** (ii)の条件をみたす．ゆえに $M[G] \models$ (II)．

(VII′)　都合上，分出公理を先に証明しておく．**5.4.1** により $M[G]$ の**弱超推移性**

$$(1)\quad \forall x \in M[G] \forall y[(y \text{ は } M[G] \text{ で定義可能なクラスである}) \wedge y \subseteq x \to y \in M[G]]$$

が証明できれば十分である．これを示すために任意に $\bar{a} \in M[G]$ をとる．また，y は $M[G]$ で定義可能なクラスで，$y \subseteq \bar{a}$ とする．よって $\mathscr{F}$ の論理式 $\varphi(x)$ が存在して

$$y=\{\bar{z} \mid M[G] \models \varphi(z)\} \subseteq \bar{a}$$

となる．

$$c=\{\langle t, p\rangle \mid t \in \mathrm{Dom}(a) \wedge p \Vdash^* \varphi(t)\}$$

とすれば，定義可能性補題により c は M で定義可能なクラスであって

$$c \subseteq \mathrm{Dom}(a) \times P \in M$$

であるから，$c \in M$ となる．このとき

$$(2)\quad y=\bar{c} \in M[G]$$

である．これは(1)を証明した．以下(2)の証明：任意に $\bar{z} \in \bar{c}$ をとる．$\bar{x}=\bar{z}$, $\langle x, p\rangle \in c$ なる $p \in G$ と x とがある．よって $p \Vdash^* \varphi(x)$．真実性補題により $M[G] \models \varphi(x)$ となるから $\bar{x} \in y$，したがって $\bar{z} \in y$．逆に y の任意の要素 $\bar{z}$ をとると，$M[G] \models \varphi(z)$．$y \subseteq \bar{a}$ より $\bar{z} \in \bar{a}$．よって $\bar{x}=\bar{z}$, $x \in_G a$ なる x がある．したがって $x \in \mathrm{Dom}(a)$ から $M[G] \models x=z$，ゆえに $M[G] \models \varphi(x)$．真実性補題により $p \Vdash^* \varphi(x)$ なる $p \in G$ がある．よって $\langle x, p\rangle \in c$．したがって $x \in_G c$．これは $\bar{x} \in \bar{c}$ を意味し，したがって $\bar{z} \in \bar{c}$．これで(2)が示された．

注意　(1)なる $y \subseteq \bar{a}$ に対し y の名前 c (i.e. $y=\bar{c}$) を $c \subseteq \mathrm{Dom}(a) \times P$ なるようにとれることがわかる．▨

(III)　任意の $\bar{a} \in M[G]$ に対し $\bigcup \bar{a} \in M[G]$ であることが証明できればよい(**5.4.1** の(iii))．このため，一般的な次の事実を証明しておこう．

(＊)　f が $M[G]$ で定義可能なクラスでかつ関数であれば，$\bar{a} \in M[G] \wedge \bar{a} \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ なる任意の $\bar{a}$ に対し $\bigcup\{f`\bar{x} \mid \bar{x} \in \bar{a}\} \subseteq \bar{c}$ となる $\bar{c} \in M[G]$ が存在する．

$(*)$の証明: 仮定により $f`\bar{x}=\bar{y} \leftrightarrow M[G]\models\varphi(x, y)$ なる $\mathscr{F}$ の論理式 φ がある. これに対し

(3) $\forall p \forall x \in \mathrm{Dom}(a)[\exists y(p \Vdash^* \varphi(x, y)) \to \exists y \in b(p \Vdash^* \varphi(x, y))]$

なる $b \in M$ が存在する. なぜなら, M では $V=L$ が成り立っているので M 全体を整列する順序関係が(M で定義可能なクラスとして)存在する. この順序で所要の条件をみたす最初の y を選び出せば, 定義域が $\mathrm{Dom}(a)\times P$ である(M で定義可能な)関数が得られる. 定義域が M の集合であるからその値域も M の集合である. これを b とすればよい. この b は推移的集合であると仮定してよい. そこで

(4) 任意の $z \in \bigcup\{f`\bar{x} | \bar{x} \in \bar{a}\}$ が b の中にその名前をもつ

ことを証明しよう. そのためかかる z をとる. ある $\bar{x} \in \bar{a}$ に対し $z \in f`\bar{x}$. 既にみてきたように $x \in_G a$ と考えても一般性を失わない. $f`\bar{x}=\bar{y}$ とおけば $M[G] \models\varphi(x, y)$. よって真実性補題により $p \Vdash^* \varphi(x, y)$ なる $p \in G$ が存在する. よって(3)により $p \Vdash^* \varphi(x, y')$ なる $y' \in b$ がある. ゆえに $M[G]\models\varphi(x, y')$, すなわち $f`\bar{x}=\bar{y}'$. よって $z \in \bar{y}'$, したがってある $d \in_G y'$ に対し $z=\bar{d}$ となる. $d \in \mathrm{Dom}(y') \wedge y' \in b$. ゆえに $d \in b$ ($\because$ Trans(b)). したがって z は b の中に名前をもつ. これで(4)が示された. このとき

(5) $$\bigcup\{f`\bar{x} | \bar{x} \in \bar{a}\} \subseteq \bar{c}$$

なる $c \in M$ が存在する. それには $c=b\times\{1\}$ とすればよい(1 は 1_P の意). そのとき, 任意の $z \in \bigcup\{f`\bar{x} | \bar{x} \in \bar{a}\}$ に対し $d \in b$, $\bar{d}=z$ なる z があるので $\langle d, 1\rangle \in c$, したがって $d \in_G c$, ゆえに $z=\bar{d} \in \bar{c}$ となるからである. これで$(*)$が証明された.

さて(III)の証明にもどる. $f=\{\langle\bar{x}, \bar{x}\rangle | \bar{x} \in M[G]\}$ は $M[G]$ で定義可能なクラスでしかも関数である. $\bar{a} \in M[G]$ であるからもちろん $\bar{a} \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. よって$(*)$により

(6) $$\bigcup\{f`\bar{x} | \bar{x} \in \bar{a}\} \subseteq \bar{c}$$

なる $\bar{c} \in M[G]$ がある. (6)の左辺は $\bigcup\bar{a}$ にほかならないから

$$\bigcup\bar{a} \subseteq \bar{c} \in M[G].$$

$\bigcup\bar{a}$ は $M[G]$ で定義可能であるから $M[G]$ の弱超推移性 (1) によって $\bigcup\bar{a} \in M[G]$. ゆえに $M[G]\models$(III).

(IV) $\forall\bar{a}[\mathscr{P}(\bar{a})\cap M[G] \in M[G]]$ が示されればよい(**5.4.1** (iv)). そこで任意に $\bar{a}$ をとる. $\bar{x} \in \mathscr{P}(\bar{a})\cap M[G]$ なる $\bar{x}$ に対し, $\bar{x}\subseteq\bar{a}$ より, $c \subseteq \mathrm{Dom}(a)\times P$ なるある c をもって $\bar{x}=\bar{c}$. ((VII′)の証明の末尾の注意を参照. $\bar{x} \in M[G]$

であるから $\bar{x}$ は $M[G]$ で定義可能なクラスである.）ところで $c\in\mathcal{P}(\mathrm{Dom}(a)\times P)\cap M$ であるから，結局 $\mathcal{P}(\bar{a})\cap M[G]$ のどの要素 $\bar{x}$ も M の要素 $\mathcal{P}(\mathrm{Dom}(a)\times P)\cap M$ の中にその名前をもつことになる．よって(III)の証明のようにして $\mathcal{P}(\bar{a})\cap M[G]\subseteq\bar{b}$ なる $\bar{b}$ が存在する．$\mathcal{P}(\bar{a})\cap M[G]$ は $M[G]$ で定義可能であるから，$M[G]$ の弱超推移性により $\mathcal{P}(\bar{a})\cap M[G]\in M[G]$ である．

(VII) (III)の証明中の(*)と $M[G]$ の弱超推移性とによって，**5.4.1** (vii)の条件が満たされる．よって $M[G]\vDash$(VII).

(IX) **5.4.1** (viii)は使うことができないので，直接証明しなければならない．$M[G]$ において

$$K(\bar{b})=\{K(\bar{a})\mid\exists p\in G[\langle\bar{a},p\rangle\in\bar{b}]\}$$

と定義する．$\rho(\bar{a})<\rho(\bar{b})$ であるから，$K(\bar{b})$ の定義は $M[G]$ における $\rho(\bar{b})$ についての超限帰納的定義である．$y\in M$ ならば $\langle\bar{a},p\rangle\in y$ なる $\bar{a}$ は M の要素であるということに注意して，超限帰納法により

(7) $$y\in M\rightarrow K(y)=\mathrm{val}(y,G)$$

であることがわかる．なぜなら $y\in M$ のとき

$$\begin{aligned}K(y)&=\{K(\bar{a})\mid\exists p\in G[\langle\bar{a},p\rangle\in y]\}\\&=\{K(x)\mid\exists p\in G[\langle x,p\rangle\in y]\}\\&=\{\mathrm{val}(x,G)\mid\exists p\in G[\langle x,p\rangle\in y]\}\qquad(\text{帰納法の仮定による})\\&=\mathrm{val}(y,G)\end{aligned}$$

となるからである．そこで任意の $\bar{a}\in M[G]$ をとる．$M\vDash\mathrm{AC}$ であるからこの $a\in M$ に対し順序数 $\alpha\in M$ と

$$f:\alpha\xrightarrow{\text{全射}}\mathrm{Dom}(a)$$

なる $f\in M$ とが存在する．合成 $K\circ f$ を考えると

$$K\circ f:\alpha\xrightarrow{\text{全射}}\{K(x)\mid x\in\mathrm{Dom}(a)\}$$

である．$a\in M$ であるから(7)により $\{K(x)\mid x\in\mathrm{Dom}(a)\}=\{\bar{x}\mid x\in\mathrm{Dom}(a)\}$. これは明らかに $M[G]$ の要素である．よってこれを $\bar{c}$ とおくと，

$$K\circ f:\alpha\xrightarrow{\text{全射}}\bar{c}$$

である．$\bar{x}\in\bar{a}$ ならば $x\in\mathrm{Dom}(a)$ であるから $\bar{x}\in\bar{c}$. よって $\bar{a}\subseteq\bar{c}$. ゆえに $\bar{a}$ は $K\circ f$ を用いて整列することができる．これは

$$M[G]\vDash\bar{a}\ \text{は整列される}$$

ことを意味する．ゆえに $M[G]\vDash\mathrm{AC}$.

以上の議論から，次の結果が得られた.

定理 7.4.1 $M[G] \models$ ZFC. ▨

実は，$M[G]$ は次の意味で**最小性**をもつモデルである.

定理 7.4.2 N が ZFC の推移モデルで，$M \subseteq N$ かつ $G \in N$ ならば，$M[G] \subseteq N$ である.

証明 任意に $\bar{a} \in M[G]$ をとる. $a \in M \subseteq N$ である. $\in_G$ などの絶対性を用いると，帰納法により

$$\bar{a} = \{\bar{x} \mid x \in_G a\} = \{\bar{x}^N \mid (x \in_G a)^N\} = \bar{a}^N \in N. \quad ▨$$

7.5 非構成可能集合の存在

本節では，構成可能でない集合の存在が ZFC と矛盾しないことを証明する. すなわち

$$\text{ZFC} + \neg(V = L)$$

の無矛盾性である.

P は M に属する強制概念で，G は M 上の P-generic フィルターとする. まず

補題 7.5.1 M と $M[G]$ は同じ順序数をもつ.

証明 順序数の概念は絶対的であり，M と $M[G]$ は推移モデルであるから，補題の主張は

(1) $$M \cap \text{OR} = M[G] \cap \text{OR}$$

であることにほかならない. これを示すには

(2) $$M[G] \cap \text{OR} \subseteq M \cap \text{OR}$$

を証明すれば十分. よって α を $M[G] \cap \text{OR}$ の任意の要素とする. ある $a \in M$ に対し $\alpha = \bar{a}$ とかける. $x \in M$ に対し M における $\rho(x)$ についての超限帰納法によって

(3) $$\rho(\bar{x}) \leq \rho(x)$$

を証明しよう. そのため $\forall y[\rho(y) < \rho(x) \to \rho(\bar{y}) \leq \rho(y)]$ と仮定する. これを用いて

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \sup\{\rho(y)+1 \mid y \in x\} \geq \sup\{\rho(z)+1 \mid \exists p \in G[\langle z, p\rangle \in x]\} \\ &\geq \sup\{\rho(\bar{z})+1 \mid z \in_G x\} = \sup\{\rho(\bar{z})+1 \mid \bar{z} \in \bar{x}\} = \rho(\bar{x}). \end{aligned}$$

よって(3)が成り立つ. (3)によって

$$\alpha = \rho(\alpha) \leq \rho(a) \in M.$$

したがって $\alpha \in M$. これは(2)を，したがって(1)を証明した. ▨

それでは，基数についてはどんなことがいえるであろうか．順序数の概念は絶対的であったから，αがモデルMの(または$M[G]$の)順序数であればαは真の(すなわち宇宙Vの)順序数である．では，κがモデルMの基数であるときκはつねに真の基数であるといえるだろうか．そこで“κがモデルMの基数である”すなわち

(4) $$M \vDash \kappa \text{ は基数である}$$

とは何を意味するかを検討してみよう．(4)を記述すれば次のようである：

$$\kappa \in M \cap \mathrm{OR} \wedge \forall \alpha[\alpha<\kappa \rightarrow \forall f \in M[(f: \kappa \rightarrow \alpha) \rightarrow (f \text{ は 1-1 でない})]].$$

これは“**Mに属する関数によっては** κはそれより小さい順序数と1対1に対応づけることができない”ことを意味する．Mに属さない関数を使えばκとそれより小さいある順序数αとを1対1に対応づけることができる場合がありうる．よって一般にκがモデルMの基数であっても，Mの外から眺めればそれは基数でないことがありうるわけである．この理由で“**基数の概念は絶対的でない**”のである．さて

補題 7.5.2 $M[G]$の基数はMの基数である．

証明 κを$M[G]$の基数とする．κは$M[G]$の一つの順序数であるから**7.5.1**によりMの順序数である．そこでκがMの基数でないと仮定する．よってMのある順序数$\alpha<\kappa$と$f: \kappa \xrightarrow{1\text{-}1} \alpha$なる関数$f \in M$とがある．もちろん$f$は$M[G]$の関数でもあるから，このことは$\kappa$が$M[G]$の基数でないことを意味する．これは不合理であるから，κはMの基数でなければならない．▨

この補題の逆は必ずしもいえない．0, 1, 2, …, ωなどはM, $M[G]$どちらの意味でも基数である．しかしMの非可算基数は必ずしも$M[G]$の基数とならないのである．このことは強制概念Pの選び方に依存する．

例 1. $P=\{p \mid p: \omega \xrightarrow{\text{部分}} \aleph_1{}^M \wedge |\mathrm{Dom}(p)|<\aleph_0\}$

とする．ここに$\aleph_1{}^M$はMにおける$\aleph_1$の意味である．明白に$P \in M$．$p, q \in P$に対し

$$p \leq q \equiv p \supseteq q$$

と定義する．0はPの最大元である．GをこのPについてのM上のP-genericフィルターとする．$M[G]$では$\aleph_0$から$\aleph_1{}^M$の上への写像が存在する．すなわち

(5) $$f=\bigcup G$$

とおくと，$f: \aleph_0 \longrightarrow \aleph_1{}^M$は全射関数で，明白に$f \in M[G]$．よって$M$の非

可算基数 $\aleph_1{}^M$ は $M[G]$ では可算順序数となってしまう：

$$M[G] \models \aleph_0 \sim \aleph_1{}^M.$$

そして $\aleph_0 \neq \aleph_1{}^M$ であるから，$\aleph_1{}^M$ は $M[G]$ では基数でないことがわかる．これを**基数の崩壊**という．▒

問 1.　(5)なる f が $\aleph_0$ から $\aleph_1{}^M$ への全射関数であることを示せ．▒

さて **7.5.1** の系として次のことがわかる．

定理 7.5.3　M と $M[G]$ とは同じ構成可能集合たちをもつ．

証明　**6.1.16** によって $x \in L_\alpha$ は絶対的である．よって **6.2.3** のすぐ下の式により

$$L^M = \bigcup_{\alpha \in M} L_\alpha, \qquad L^{M[G]} = \bigcup_{\alpha \in M[G]} L_\alpha.$$

$M \cap \mathrm{OR} = M[G] \cap \mathrm{OR}$ であるから，結局

$$(6) \qquad L^M = L^{M[G]}$$

が得られる．すなわち M, $M[G]$ は同一の構成可能集合たちをもっている．▒

ところで M では $V=L$ が成り立つから

$$M = L^M.$$

よって(6)から

$$(7) \qquad L^{M[G]} = M$$

となる．

$H(\omega, 2)$ は **7.2** の例 1 で与えた強制概念で M に属するものである．これに対し

定理 7.5.4　G が M 上の $H(\omega, 2)$-generic フィルターならば

$$M[G] \models \neg(V=L).$$

証明　G が定理にいうフィルターならば，**7.2** の議論によって $G \notin M$．よって(7)から $G \notin L^{M[G]}$．このことは $M[G]$ で $V=L$ が成立しないことを意味する．▒

なお，**7.5.4** において

$$f = \bigcup G$$

とおくと，**7.2.6** により f は ω の一つの部分集合(の特性関数)である．容易にわかるように $f \notin M$．もちろん $f \in M[G]$ であるから，$M[G]$ では“ω の部分集合で構成可能集合でないものが存在する”ことがいえたことになる．ω の部分集合は実質的に“実数”と呼んでよいから，結局 **7.5.4** の generic フィルター G に対し

$$M[G] \vDash \text{非構成可能実数が存在する}$$

が成り立つわけである．

問 2.　上記 f に対し $f \notin M$ を証明せよ．▒

上の定理から次のことが結論される：

定理 7.5.5　ZF が無矛盾であれば

$$\mathrm{ZFC} + \neg (V = L)$$

も無矛盾である．▒

定理 7.5.6　ZF が無矛盾であれば，$V=L$ は ZFC から独立である．すなわち，ZFC では $V=L$ を証明することも否定することもできない．▒

7.6　選択公理の独立性（I）

M の generic 拡大モデル $M[G]$ をつくっても $M[G] \vDash \mathrm{AC}$ であった．よって AC が成立しないモデルをつくるには何か別の工夫が必要である．その工夫は以下で述べるようにやや複雑であるが，一口でいえば，P を適当に選び $M[G]$ をつくってから，その特別な部分集合を見つけて $\mathrm{ZF} + \neg \mathrm{AC}$ のモデルにするのである．

強制概念 P の**自己同型**とは，順序構造としての P の自己同型のことである．前のように $P \in M$ とし，G は M 上の P-generic フィルターとする．

補題 7.6.1　π が P の自己同型で $\pi \in M$ ならば，$\pi(G)$ は再び M 上の P-generic フィルターであって，$M[G] = M[\pi(G)]$ が成り立つ．

証明　$\pi(1) = 1$ であるから $1 \in \pi(G)$†．$p \in \pi(G) \wedge p \leq q$ とすると，$\pi^{-1}(p) \in G \wedge \pi^{-1}(p) \leq \pi^{-1}(q)$ である．よって $\pi^{-1}(q) \in G$，したがって $q \in \pi(G)$．次に $p, q \in \pi(G)$ に対し $\pi^{-1}(p)$，$\pi^{-1}(q) \in G$ であるから $r \leq \pi^{-1}(p)$，$\pi^{-1}(q)$ なる $r \in G$ がある．$r = \pi^{-1}(s)$ とおくと $s \in \pi(G)$ であって $s \leq p,\ q$．おしまいに $D \in M$ を P-稠密とする．$\pi^{-1}(D) \in M$ である．$\pi^{-1}(D)$ も P-稠密である．ゆえに $\pi^{-1}(D) \cap G \neq 0$．したがって $D \cap \pi(G) \neq 0$．これで $\pi(G)$ が M 上の P-generic フィルターであることがわかった．次に $G, \pi \in M[G]$ であるから $\pi(G) \in M[G]$，したがって $M[\pi(G)] \subseteq M[G]$．G の代わりに $\pi(G)$，π の代わりに π^{-1} を使えば今のことから $M[G] \subseteq M[\pi(G)]$ が得られる．よって $M[G] = M[\pi(G)]$．▒

---

† $\pi`1$，$\pi``G$ とかくべきであるが習慣に従って $\pi(1)$，$\pi(G)$ と書き表わす．π^{-1} についても同様．本章では，他のものについてもこのような習慣上の記法を使うことが多い．

P の自己同型全体の集合を $\mathrm{Aut}(P)$ で表わす．$\mathcal{A}\subseteq\mathrm{Aut}(P)$ とし，$\mathcal{A}\in M$ なるものを考える．M の要素 a が $\mathcal{A}$-**不変**であるとは

$$\forall\pi\in\mathcal{A}[\mathrm{val}(a,G)=\mathrm{val}(a,\pi(G))]$$

が成り立つことをいう．

例 1. 任意の $\mathcal{A}\subseteq\mathrm{Aut}(P)$（もちろん $\mathcal{A}\in M$ として）と任意の $a\in M$ に対し，$\check{a}$ は $\mathcal{A}$-不変である．なぜなら M 上の**任意の** P-generic フィルター G について $\mathrm{val}(\check{a},G)=a$ であるから，特に $\pi\in\mathcal{A}$ に対し $\mathrm{val}(\check{a},\pi(G))=a$．よって $\mathrm{val}(\check{a},G)=\mathrm{val}(\check{a},\pi(G))$．▨

φ を強制言語 $\mathcal{F}$ の文とする．φ が $\mathcal{A}$-**不変**とは φ の中のすべての定数(それは M の要素である)が $\mathcal{A}$-不変であることをいう．

P が条件

(1) $\forall p,q\in P\,\exists\pi\in\mathcal{A}[\pi^{-1}(p)$ と q は両立する$]$

をみたすとき，P は $\mathcal{A}$-**均質**であるという．この場合，必ずしも $\mathcal{A}\in M$ なることを要求しない．P が $\mathrm{Aut}(P)$-均質のとき，単に P は**均質**であるという．

補題 7.6.2 u が無限集合ならば，任意の集合 v に対し

$$H(u,v)=\{p\mid p: u\xrightarrow{\text{部分}} v\wedge|\mathrm{Dom}(p)|<\aleph_0\}$$

は均質である．

証明 任意に $p,q\in H(u,v)$ をとる．u が無限集合であるから u の順列† σ で $\sigma(\mathrm{Dom}(p))\cap\mathrm{Dom}(q)=0$ なるものがある．$r\in H(u,v)$ に対し，π を

$$\begin{cases}\mathrm{Dom}(\pi(r))=\{\sigma^{-1}(a_1),\cdots,\sigma^{-1}(a_l)\}\\ \pi(r)(\sigma^{-1}(a_i))=r(a_i)\qquad(i=1,2,\cdots,l)\end{cases}$$

によって定義する．ただし $\mathrm{Dom}(r)=\{a_1,a_2,\cdots,a_l\}$ であるとする．このとき π は $H(u,v)$ の自己同型である．そして $\pi^{-1}(p)\cup q$ は $\pi^{-1}(p)$ と q の共通の拡大である．なぜなら $\pi^{-1}(p)=r$ とおくと，$p=\pi(r)$．$\mathrm{Dom}(r)=\{a_1,a_2,\cdots,a_l\}$ とすれば $\mathrm{Dom}(p)=\{\sigma^{-1}(a_1),\sigma^{-1}(a_2),\cdots,\sigma^{-1}(a_l)\}$ であり

$$0=\sigma(\mathrm{Dom}(p))\cap\mathrm{Dom}(q)=\mathrm{Dom}(r)\cap\mathrm{Dom}(q)$$

であるから，$r\cup q$ は r と q の共通の拡大である．ゆえに(1)が $\mathcal{A}=\mathrm{Aut}(H(u,v))$ に対し成立する．▨

補題 7.6.3 $\mathcal{A}\subseteq\mathrm{Aut}(P)$ とし $\mathcal{A}\in M$ とする．このときもし P が $\mathcal{A}$-均質で φ が $\mathcal{F}$ の $\mathcal{A}$-不変な文ならば

$$M[G]\vDash\varphi\leftrightarrow 1\Vdash^*\varphi.$$

† σ が u の**順列**とは，$\sigma: u\xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}} u$ なること．また $\sigma(\mathrm{Dom}(p))$ は $\sigma``\,\mathrm{Dom}(p)$ の意．

証明 $1\Vdash^*\varphi$ ならば $1\in G$ であるから真実性補題によって $M[G]\models\varphi$ である．逆に $M[G]\models\varphi$ とし，$1\Vdash^*\varphi$ が成り立たないと仮定しよう．真実性補題により $p\Vdash^*\varphi$ なる $p\in G$ がある．**7.3** 問2により

$$r\Vdash^*\varphi \leftrightarrow \forall q\leq r\neg(q\Vdash^*\neg\varphi)$$

であるから，$\neg(1\Vdash^*\varphi)$ なることによって $q\Vdash^*\neg\varphi$ なる q が存在しなければならない．仮定により P は $\mathcal{A}$-均質なるゆえ，$\pi^{-1}(p)$ と q とが両立するような $\pi\in\mathcal{A}$ がある．共通の拡大を s とする．$s\in G'$ なる M 上の P-generic フィルター G' をとると，$\pi^{-1}(p), q\in G'$ である．**7.6.1** により $\pi(G')$ は M 上の P-generic フィルター，そうして $p\in\pi(G')$．したがってまとめると

$$p\in\pi(G')\wedge p\Vdash^*\varphi,$$
$$q\in G'\wedge q\Vdash^*\neg\varphi.$$

真実性補題により

$$M[\pi(G')]\models\varphi \quad かつ \quad M[G']\models\neg\varphi.$$

しかし **7.6.1** により $M[\pi(G')]=M[G']$ であるからこれは不合理．ゆえに $M[G]\models\varphi$ ならば $1\Vdash^*\varphi$ でなければならない．▨

ここで **6.9** で定義した順序数定義可能性と遺伝的順序数定義可能性を少し拡張した概念を導入する．

定義 7.6.4 集合 u が集合 $v_1, \cdots, v_k$ **から順序数定義可能**であるとは

$$\exists\alpha[v_1, \cdots, v_k\in V_\alpha\wedge\ u \text{ は } V_\alpha \text{ において } v_1, \cdots, v_k \text{ から定義可能}].$$

($k=0$ の場合が **6.9** における順序数定義可能性である．)

u が集合 w **上で順序数定義可能**であるとは，ある $v_1, \cdots, v_k\in w$ が存在して u が $v_1, \cdots, v_k$ から順序数定義可能であることである．w 上で順序数定義可能な集合たちはクラスをつくる．これを OD_w で表わす．

u が w **上で遺伝的順序数定義可能**であるとは，u が w 上で順序数定義可能でしかも u のすべての要素が w 上で遺伝的順序数定義可能であることである．これは $\rho(u)$ についての超限帰納的定義である．よって w 上で遺伝的順序数定義可能な集合たちはクラスをなす．これを HOD_w で表わす．▨

以下では“順序数定義可能”を OD で，“遺伝的順序数定義可能”を HOD で表わすことにする．

例 2. 各順序数は OD である(**6.9.4**)．したがってそれは任意の集合 $v_1, \cdots, v_k$ から OD であり，したがってまた任意の集合 w 上で OD である．このことから各順序数は任意の集合 w 上で HOD であることがわかる．▨

問 1. $u\in w$ ならば，u は w 上で OD である．▨

補題 7.6.5 (ZF) $\mathrm{HOD}_w \models \mathrm{ZF}$.

証明 **6.9.10** の証明と殆ど同様である. ▨

$\mathrm{HOD} \models \mathrm{AC}$ であった. 今度は w が関係するから HOD_w では AC が成立するかどうかわからない. **6.9.5** を OD_w の場合に適用しようと試みるとき ($\mathrm{Def}_1(v)$ でなく $\mathrm{Def}(v)$ が必要となる), w の“定義可能な”整列性が必要になるであろう.

補題 7.6.6 $\mathscr{A} \subseteq \mathrm{Aut}(P)$ で $\mathscr{A} \in M$ とする. P が $\mathscr{A}$-均質で, u が $M[G]$ において $v_1, \cdots, v_k$ から OD でありしかも各 v_i が $\mathscr{A}$-不変な名前をもつならば, $u \cap M \in M$ である.

証明 u は $M[G]$ において $v_1, \cdots, v_k$ から OD であるから, $v_1, \cdots, v_k$ の名前を $b_1, \cdots, b_k$ とするとき, $\mathscr{F}$ の論理式 $\psi(x, b_1, \cdots, b_k)$ と順序数 $\alpha \in M[G]$ があって $u = \{\bar{a} \in V_\alpha \cap M[G] \mid V_\alpha \cap M[G] \models \psi(a, b_1, \cdots, b_k)\}$. ここで $\bar{x} \in V_\alpha \cap M[G]$ と解釈する part は, 絶対性をもつ論理式 $\rho(\bar{x}) < \alpha$ を $\mathscr{F}$ の記号でかいたものを $\theta(x, b)$ (ただし $\bar{b} = \alpha$) とするとき, この $\theta(x, b)$ として ψ の中へ組み入れる. かくて

$$\forall a \in M[\bar{a} \in u \leftrightarrow M[G] \models \varphi(a)] \tag{2}$$

なる $\mathscr{F}$ の論理式 $\varphi(x)$ でその中には定数記号として $v_1, \cdots, v_k, \alpha$ の名前だけが現われるようなものが得られる. $M \cap \mathrm{OR} = M[G] \cap \mathrm{OR}$ であるから, $\alpha \in M$. よって $\check{\alpha}$ は $\mathscr{A}$-不変(例 1). だから $\varphi(x)$ の中の名前はすべて $\mathscr{A}$-不変である. (2)で a の代わりに $\check{a}$ を代入すると

$$a \in u \leftrightarrow M[G] \models \varphi(\check{a}) \leftrightarrow 1 \Vdash^* \varphi(\check{a}) \tag{7.6.3}$$

であるから, $u \cap M = \{a \mid 1 \Vdash^* \varphi(\check{a})\}$ は M におけるクラスである. (弱強制関係 $\Vdash^*$ は M で定義可能であった.) ところで $\beta = \rho(u)$ とすれば

$$u \cap M \subseteq V_\beta \cap M = V_\beta{}^M,$$

すなわち, $u \cap M$ は M のクラスで M の一つの集合に含まれる. よって $u \cap M \in M$ である. ▨

定理 7.6.7 $P \in M$ は均質であるとする. そのとき

(i) u が $M[G]$ において OD ならば, $u \cap M \in M$.

(ii) u が $M[G]$ において HOD ならば, $u \in M$. すなわち $\mathrm{HOD}^{M[G]} \subseteq M$.

証明 (i) これは **7.6.6** の特別な場合である.

(ii) $\rho(u)$ についての超限帰納法による. $\rho(x) < \rho(u)$ で x が $M[G]$ において HOD ならば, $x \in M$ であるとする. u が $M[G]$ において HOD であ

れば，

1°)　u は $M[G]$ において OD であり，2°)　u のどの要素 x も $M[G]$ において HOD である．1°)により(i)を用いて $u\cap M\in M$．　2°)と帰納法の仮定とにより $u\cap M=u$．よって $u\in M$．▨

そこで，$P=H(\omega,2)$ ととり，G を M 上の P-generic フィルターとする．既知のように $L^{M[G]}=M$ である(**7.5** の(7))．前定理によって

$$M[G]\models \mathrm{HOD}\subseteq M.$$

一方，$\mathrm{ZF}\vdash L\subseteq\mathrm{HOD}$ であるから

$$M[G]\models L\subseteq\mathrm{HOD}.$$

したがって

$$M[G]\models L=\mathrm{HOD}.$$

かくて次の定理が得られた．

定理 7.6.8　$P=H(\omega,2)$ とし G を M 上の P-generic フィルターとすれば

$$M[G]\models L=\mathrm{HOD}\subsetneq V.$$

したがって，ZF が無矛盾ならば $\mathrm{ZFC}+L=\mathrm{HOD}\subsetneq V$ は無矛盾である．

証明　$M[G]\models\neg(V=L)$ であるから，$\subsetneq V$ の部分がいえる．▨

さて，**7.5** の問 2 によれば上の G に対し

(3)　$$M[G]\models \exists z\subset\omega[z\notin L]$$

であった．$M[G]$ において

(4)　$$n\in\omega\to n\in\mathrm{HOD}$$

であることが容易にわかる．したがって

"(3)なる z は $M[G]$ で OD でない．"

なんとなれば，もし z が $M[G]$ で OD ならば，(4)によって z のどの要素も $M[G]$ で HOD であるから，$z\in\mathrm{HOD}^{M[G]}$ となってしまう．これは $z\in L^{M[G]}$ を意味するから(3)と矛盾する．

定理 7.6.9　**7.6.8** の条件の下に

$$M[G]\models\neg\exists\alpha\exists f[f:\alpha\xrightarrow[\text{onto}]{}\mathcal{P}(\omega)\wedge f\in\mathrm{OD}]$$

証明　もし $M[G]$ においてかかる α と f があれば，$\forall\beta<\alpha[f`\beta\in\mathrm{OD}]$ となる．ところが(3)なる $z$ に対し——それは $M[G]$ で OD でない——$f`\beta=z$ なる $\beta<\alpha$ が存在することになり不合理である．▨

この定理を言い直すと次のようになる：

定理 7.6.10　"連続体 $\mathcal{P}(\omega)$ を整列する OD なる全順序関係は存在しな

い”という命題は ZFC と矛盾しない．▨

すなわち，選択公理があっても $\mathscr{P}(\omega)$ を整列する順序関係は集合論的に定義可能でない(無矛盾の意味で)というわけである．

ここで議論を中断して，強制概念の直積，generic 拡大の反復という概念を導入する．

7.7　強制概念の直積

定義 7.7.1　$\langle P_i, \le_i, 1_i\rangle$ $(i=1, 2)$ を 2 つの強制概念とする．$P_1\times P_2$ 上の順序関係 $\le$ を $p_1, q_1 \in P_1$,　$p_2, q_2 \in P_2$ に対し

(1)　$$\langle p_1, p_2\rangle \le \langle q_1, q_2\rangle \equiv p_1 \le q_1 \wedge p_2 \le q_2$$

によって定義する．$\langle 1_1, 1_2\rangle$ は $P_1\times P_2$ の $\le$ に関する最大元である．$\langle P_1\times P_2, \le, \langle 1_1, 1_2\rangle\rangle$ を強制概念 P_1, P_2 の**直積**という．▨

明らかに $P_1, P_2 \in M$ ならば $P_1\times P_2 \in M$ である．このとき，次の興味ある定理が成り立つ：

定理 7.7.2　(**直積定理**)　P_1, P_2 が M に属する強制概念で，G_1 が M 上の P_1-generic フィルター，G_2 が $M[G_1]$ 上の P_2-generic フィルターならば，$G_1\times G_2$ は M 上の $P_1\times P_2$-generic フィルターであってしかも

$$M[G_1\times G_2]=M[G_1][G_2]$$

が成り立つ．ここに $M[G_1][G_2]$ は $M[G_1]$ を基礎モデルとしたときの G_2 による generic 拡大である．また M 上の任意の $P_1\times P_2$-generic フィルターはこの方法で得られる．

証明　$G=G_1\times G_2$ が **7.2.2** の 1°)～3°)をみたすこと，すなわち G が $P=P_1\times P_2$ におけるフィルターであることは明らかであろう．よって **7.2.3** の条件 4°)

(2)　$$D \in M \wedge D \text{ は } P\text{-稠密} \rightarrow D\cap G = 0$$

を証明する．そのため D は P-稠密で $D \in M$ とする．まず

$$D_2=\{p_2 \in P_2 \mid \exists p_1 \in G_1[\langle p_1, p_2\rangle \in D]\}$$

とし，D_2 が P_2-稠密であることを証明しよう．任意に $q_2 \in P_2$ をとる．これに対し

$$D_1=\{p_1 \in P_1 \mid \exists p_2 \le q_2[\langle p_1, p_2\rangle \in D]\}$$

をつくる．D_1 は P_1-稠密である．[何となれば，任意に $q_1 \in P_1$ をとる．D は P-稠密であるから $\langle p_1, p_2\rangle \le \langle q_1, q_2\rangle$ なる $\langle p_1, p_2\rangle \in D$ がある．そのとき p_1

$\leq q_1$ で $p_1 \in D_1$.] $D_1 \in M$ であるから $G_1 \cap D_1 \neq 0$. よって $\exists p_2 \leq q_2[\langle p_1, p_2 \rangle \in D]$ なる $p_1 \in G_1$ がある. これは D_2 の定義によって $p_2 \in D_2$ なることをいっている. したがって D_2 は P_2-稠密である.

定義により $D_2 \in M[G_1]$ であるから, $G_2 \cap D_2 \neq 0$. よって $G_2 \cap D_2$ に属する p_2 をとる. $\langle p_1, p_2 \rangle \in D$ なる $p_1 \in G_1$ がある. よって $\langle p_1, p_2 \rangle \in G$. これは $G \cap D \neq 0$ を, したがって(2)を証明した. よって G が M 上の P-generic フィルターであることがわかった.

ところで $M[G_1][G_2]$ は M を含み G_1, G_2 を要素として含む最小の ZFC-モデルであり, $M[G_1 \times G_2]$ も M を含み G_1, G_2 を要素として含む最小の ZFC-モデルである(これらは容易にチェックできる). よって

$$M[G_1 \times G_2] = M[G_1][G_2].$$

おしまいに, G を任意の M 上の P-generic フィルターとする.

$$G_1' = \{p_1 \in P_1 \mid \exists p_2[\langle p_1, p_2 \rangle \in G]\} \quad (=\mathrm{Proj}_{P_1}(G) \text{ とかく})$$

$$G_2' = \{p_2 \in P_2 \mid \exists p_1[\langle p_1, p_2 \rangle \in G]\} \quad (=\mathrm{Proj}_{P_2}(G) \text{ とかく})$$

とすれば, $G \subseteq G_1' \times G_2'$. 逆の包含関係を証明するために任意に $\langle p_1, p_2 \rangle \in G_1' \times G_2'$ をとる. よってある q_1, q_2 があって $\langle p_1, q_2 \rangle$, $\langle q_1, p_2 \rangle \in G$ である. G はフィルターであるから, これらの共通の拡大 $\langle r_1, r_2 \rangle$ で G の中にあるものが存在する. このとき $\langle r_1, r_2 \rangle \leq \langle p_1, p_2 \rangle$ となるので $\langle p_1, p_2 \rangle \in G$ である. よって $G_1' \times G_2' \subseteq G$, したがって $G = G_1' \times G_2'$.

G_1' が M 上の P_1-generic フィルターであることの証明: フィルターなることはすぐわかる. そこで $D_1 \in M$ を P_1-稠密な集合とする. $D_1 \times P_2$ は P-稠密でかつ M に属する. よって $G \cap (D_1 \times P_2) \neq 0$. したがって $G_1' \cap D_1 \neq 0$.

G_2' が $M[G_1]$ 上の P_2-generic フィルターであることの証明: 再びフィルターであることは容易にわかる. $D_2 \in M[G_1']$ を任意の P_2-稠密集合とする.

(3) $$G_2' \cap D_2 \neq 0$$

なることを証明したい. D_2 に対し $D_2 = \bar{a}$, $a \in M$ なる名前 a がある. a が P_2-稠密であることを主張する $\mathscr{F}$ の文を $\varphi(a)$ とする.

$$D = \{\langle p_1, p_2 \rangle \mid p_1 \Vdash {}^*(\neg\varphi(a) \vee p_2 \in a)\}$$

なる D をつくれば, D は P-稠密である. これを示すために任意に $\langle q_1, q_2 \rangle \in P$ をとる. $q_1 \in G_1{}^*$ なる M 上の P_1-generic フィルター $G_1{}^*$ がある.

(4) $$M[G_1{}^*] \vDash (\neg\varphi(a) \vee \check{p}_2 \in a), \qquad p_2 \leq q_2$$

なる $p_2 \in P_2$ がある. なぜなら, $M[G_1{}^*] \vDash \varphi(a)$ の場合は $\mathrm{val}(a, G_1{}^*)$ が P_2-稠密であるから, $p_2 \leq q_2$, $p_2 \in \mathrm{val}(a, G_1{}^*)$ なる p_2 をとると

$$\mathrm{val}(\check{p}_2, G_1^*) = p_2 \in \mathrm{val}(a, G_1^*)$$

である．これは $M[G_1^*] \models \check{p}_2 \in a$ を意味する．また $M[G_1^*] \not\models \varphi(a)$ の場合は $p_2 = q_2$ ととれば自明的に(4)が成り立つ．よって(4)が証明された．真実性補題により $p_1 \in G_1^*$, $p_1 \Vdash^* (\neg\varphi(a) \vee \check{p}_2 \in a)$ なる p_1 がある．$q_1 \in G_1^*$ であったから $p_1' \leq p_1, q_1$ なる $p_1' \in G_1^*$ が存在し，拡大補題により $p_1' \Vdash^* (\neg\varphi(a) \vee \check{p}_2 \in a)$．かくて $\langle p_1', p_2\rangle \leq \langle q_1, q_2\rangle$ で，$\langle p_1', p_2'\rangle \in D$ となり D の P-稠密性が証明された．

さて (3) の証明であるが，$D \in M$ だから今のことから $G \cap D \neq 0$．よって $\langle p_1, p_2\rangle \in G \cap D$ なる $\langle p_1, p_2\rangle$ をとる．$p_1 \in G_1'$ で $p_1 \Vdash^* (\neg\varphi(a) \vee \check{p}_2 \in a)$ であるから真実性補題により $M[G_1'] \models (\neg\varphi(a) \vee \check{p}_2 \in a)$．しかし $M[G_1'] \models \varphi(a)$ であるから $M[G_1'] \models \check{p}_2 \in a$ でなければならない．すなわち $p_2 \in \bar{a} = D_2$．$p_2 \in G_2'$ なるゆえ $G_2' \cap D_2 \neq 0$ となる．よって(3)が示された．かくて，任意の M 上の $P_1 \times P_2$-generic フィルター G が定理の前半の方法で得られることがわかった．▨

$M[G_1][G_2]$ を M の(2回) **反復 generic 拡大**といい，$M[G_1, G_2]$ で表わす．上の定理は，これが1回の generic 拡大として得られることを主張している．証明の途中で，これが M を含み，G_1, G_2 を要素として含む最小の ZFC-モデルであることもわかった．

系 7.7.3 P_1, P_2 が M に属する強制概念であるとする．G_1 が M 上の P_1-generic フィルターで，G_2 が $M[G_1]$ 上の P_2-generic フィルターならば，G_1 は $M[G_2]$ 上の P_1-generic フィルターであり，しかも

$$M[G_2, G_1] = M[G_1, G_2]$$

が成り立つ．

証明 **7.7.2** により $G_1 \times G_2$ は M 上の $P_1 \times P_2$-generic フィルターである．$P_1 \times P_2$ から $P_2 \times P_1$ の上への同型写像 $\in M$ があるから，それを使って $G_2 \times G_1$ が M 上の $P_2 \times P_1$-generic フィルターであることを確かめることができる．ここでもう一度 **7.7.2** を使うと，G_1 が $M[G_2]$ 上の P_1-generic フィルターであることがわかる．$M[G_2, G_1]$ は M を含み，G_1, G_2 を要素として含む最小の ZFC-モデルであるから $M[G_2, G_1] = M[G_1, G_2]$ である．▨

反復 generic 拡大は進んだ研究において重要な働きをする．われわれはこれを AC の独立性の証明に応用する．

7.8 選択公理の独立性(II)

$W(\omega, H(\omega, 2)) = \{p \in {}^{\omega}H(\omega, 2) \mid \{i \in \omega \mid p(i) \neq 1\}$ は有限集合$\}$
と定義し，これを**弱べき**という．$p, q \in W(\omega, H(\omega, 2))$ に対し

$$p \leq q \equiv \forall i \in \omega[p(i) \leq q(i)]$$

とし，$1(i) = 1$ for all $i \in \omega$ とすると，$\langle W(\omega, H(\omega, 2)), \leq, 1\rangle$ は M **に属する強制概念**である．簡単のため

$$P = W(\omega, H(\omega, 2))$$

とおく．G を M 上の P-generic フィルターとし

$$G_i = \{p_i \mid \langle i, p_i\rangle \in G\} \qquad (i \in \omega)$$
$$H = \{G_i \mid i \in \omega\}$$

と定義する．また

$$N = \{u \in M[G] \mid u \text{ は } M[G] \text{ において } H \text{ 上で HOD である}\}$$

とする．

定理 7.8.1 上記定義の下に，N は ZF$+\neg$AC のモデルである†.

証明 Trans(N) なることは当然であるから，$N \models$ ZF は **6.9.10** におけると同様にして証明される．そこで $N \not\models$ AC を証明しよう．そのため N において $\mathscr{P}(\omega)$ が整列されたと仮定する．よってある順序数 $\beta \in N$ に対し

$$f: \beta \xrightarrow[\text{onto}]{} \mathscr{P}(\omega) \cap N$$

なる写像 $f \in N$ が存在する．ゆえにある $n \in \omega$ に対し

f は $M[G]$ において $G_0, G_1, \cdots, G_{n-1}, H$ から OD である．

$\mathscr{P}(\omega) \cap N$ の各要素はある $\alpha \in M[G]$ に対する $f`\alpha$ である．したがってそれは $M[G]$ において $G_0, G_1, \cdots, G_{n-1}, H$ から OD である．いま

$$P = P' \times P'', \quad P' = {}^{n}H(\omega, 2), \quad P'' = W(\omega - n, H(\omega, 2))$$

と考え，G', G'' をそれぞれ G の P', P'' 上への射影とする：

$$G' = \mathrm{Proj}_{P'}(G), \qquad G'' = \mathrm{Proj}_{P''}(G).$$

直積定理により G' は M 上の P'-generic フィルター，G'' は $M' = M[G']$ 上の P''-generic フィルターである．そうして $M'[G''] = M[G]$.

今度は ${}^{n+1}H(\omega, 2) = {}^{n}H(\omega, 2) \times H(\omega, 2)$ と考え，G', G_n は G のそれぞれ ${}^{n}H(\omega, 2)$, $H(\omega, 2)$ 上への射影と考える．そのとき再び直積定理によって G_n

---

† H は $M[G]$ では整列されているが, N で定義可能な整列関係をもつわけではない.

は $M'=M[G']$ 上の $H(\omega, 2)$-generic フィルターである．よって特性関数として $\bigcup(G_n)$ をもつ集合 u は M' に属さない集合（$\subset\omega$）である．$u\subset\omega\subset M'$ であるから $u\cap M'=u$．よって $u\cap M'\notin M'$．しかし一方

（1） $$u\cap M'\in M'$$

が証明されるから不合理．よって $N\models\neg\mathrm{AC}$ でなければならない．

以下(1)の証明．$\omega-n$ の各順列 π に対し $P''=W(\omega-n, H(\omega, 2))$ の自己同型 π^* を

$$(\pi^*(p))(i)=p(\pi(i)) \qquad \text{for } p\in P''$$

によって定義する．

$$\mathcal{A}=\{\pi^*|\pi\in M'\wedge(\pi \text{ は } \omega-n \text{ の順列})\}$$

とすると，π^* の定義は絶対的であるから $\mathcal{A}\in M'$．このとき P'' は $\mathcal{A}$-均質である．[何となれば，任意の $p, q\in P''$ に対し有限個の数（$\in\omega-n$）のみを動かす順列 π を使って π^* をつくり $\pi^{*-1}(p)$ と q とが両立するようにできる．かかる $\pi\in M'$ であるから $\pi^*\in\mathcal{A}$ である.] 定義から u は G_n から OD である．そして $G_n\in H$ であるから $u\in N$ である．$u\in\mathcal{P}(\omega)\cap N$ となったから最初の仮定のところで述べた注意によって

（2） u は $M[G](=M'[G''])$ において $G_0, G_1, \cdots, G_{n-1}, H$ から OD である．

そこで

（3） $G_0, G_1, \cdots, G_{n-1}, H$ が M' において $\mathcal{A}$-不変な名前をもつ

ことがいえれば，(2)と **7.6.6** とによって $u\cap M'\in M'$ がいえるから(1)が導かれる．よって以下で(3)を証明しよう．各 $i<n$ に対し $G_i\in M'$ であり（$P'={}^nH(\omega, 2)$, G' は M 上の P'-generic フィルター，$M'=M[G']$ であった），M' を基礎モデルと考えているから

$$\check{G}_i=\{\langle\check{q}, 1\rangle|q\in G_i\}$$

なる $\check{G}_i$ を考えると，P'' の任意の自己同型 τ に対し

$$\mathrm{val}(\check{G}_i, G'')=\mathrm{val}(\check{G}_i, \tau(G''))=G_i \qquad (\textbf{7.6} \text{ 例 1 による}).$$

よって $\check{G}_i$ はもちろん $\mathcal{A}$-不変な G_i の名前である．$\check{G}_i\in M'$ は当然である．残るは H が M' の中に $\mathcal{A}$-不変な名前をもつことの証明のみである．そこで

$$a_i=\begin{cases} \check{G}_i & \text{if} \quad i<n \\ \{\langle \widecheck{p(i)}, p\rangle|p\in P''\} & \text{if} \quad i\geq n \end{cases}$$

$$a=\{a_i|i\in\omega\}\times\{1\}$$

とすれば，各 $i\in\omega$ に対し a_i は G_i の名前であり，a は H の名前である．

なぜなら，$i \geq n$ に対し

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(a_i, G'') &= \{\mathrm{val}(x, G'') \mid \exists p \in G''[\langle x, p\rangle \in a_i]\} \\ &= \{\mathrm{val}(\widetilde{p(i)}, G'') \mid p \in G''\} \qquad (a_i \text{ の定義による}) \\ &= \{p(i) \mid p \in G''\} = G_i.\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(a, G'') &= \{\mathrm{val}(x, G'') \mid \exists p \in G''[\langle x, p\rangle \in a]\} \\ &= \{\mathrm{val}(\check{q}, G'') \mid q \in G_i \wedge i<n\} \cup \{\mathrm{val}(\widetilde{p(i)}, G'') \mid p \in G'' \wedge i \geq n\} \\ &= \{q \mid q \in G_i \wedge i<n\} \cup \{p(i) \mid p \in G'' \wedge i \geq n\} \\ &= \{G_0, G_1, G_2, \cdots\} = H\end{aligned}$$

であるからである．この a が $\mathcal{A}$-不変であることを示すために任意に $\pi^* \in \mathcal{A}$ をとる．

$$\begin{aligned}\mathrm{val}(a, \pi^*(G'')) &= \{\mathrm{val}(\check{q}, \pi^*(G'')) \mid q \in G_i \wedge i<n\} \\ &\quad \cup \{\mathrm{val}(\widetilde{p(i)}, \pi^*(G'')) \mid p \in \pi^*(G'') \wedge i \geq n\} \\ &= \{q \mid q \in G_i \wedge i<n\} \cup \{p(i) \mid p \in \pi^*(G'') \wedge i \geq n\} \\ (4) \qquad &= \{q \mid q \in G_i \wedge i<n\} \cup \{p_i \mid p_i \in \pi^*(G'')_i \wedge i \geq n\}.\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}q \in \pi^*(G'')_i &\leftrightarrow \exists p'' \in G''[q=\pi^*(p'')(i)] \leftrightarrow \exists p'' \in G''[q=p''(\pi(i))] \\ &\leftrightarrow \exists p \in G[q=p(\pi(i))] \leftrightarrow q \in G_{\pi(i)}\end{aligned}$$

であることに注意すると，(4)から続いて

$$\begin{aligned}&= \{q \mid q \in G_i \wedge i<n\} \cup \{p_i \mid p_i \in G_{\pi(i)} \wedge i \geq n\} \\ &= \{G_i \mid i<\omega\} \\ &= H\end{aligned}$$

となる．(π は $\omega-n$ の順列であることに注意．) すなわち任意の $\pi^* \in \mathcal{A}$ に対し

$$\mathrm{val}(a, G'') = H = \mathrm{val}(a, \pi^*(G''))$$

であることがわかった．$a \in M'$ は容易にわかる．ゆえに a は H に対する M' の中の $\mathcal{A}$-不変な名前である．これで(3)が証明され，定理の証明が完了した． ▨

以上によってわれわれは AC の独立性をうることができた．すなわち

定理 7.8.2　ZF が無矛盾であれば，ZF＋¬AC も無矛盾である． ▨

定理 7.8.3　AC は ZF から独立である．すなわち AC は ZF において証明することも否定することもできない． ▨

選択公理に関しては **4.7** でも触れたようにいろいろな興味ある結果が知られている．それらについては [19] を参照されたい．

演習問題 VII

1. P を強制概念とする．$p, q \in P$ が両立しないとき**非整合的**であるといい $p|q$ で表わす．D ($\subseteq P$) の任意の 2 要素が非整合的なら D は**全非整合的**であるという．P の任意の全非整合的部分集合が必ず可算集合であるならば，P は**可算鎖条件**をみたすという．略して c.c.c. と記す．

1) 任意の集合 u に対し

$$H(u, 2) = \{p \mid \mathrm{Func}(p) \wedge \mathrm{Dom}(p) \subset u \wedge |\mathrm{Dom}(p)| < \aleph_0\}$$

は c.c.c. をみたす．

2) M を可算推移モデルとするとき，

$$H^M(u, 2) = \{p \mid \mathrm{Func}(p) \wedge \mathrm{Dom}(p) \subset u \wedge |\mathrm{Dom}(p)|^M < \aleph_0\}$$

とする．$u \in M$ なら

$$M \models \text{“}H^M(u, 2) \text{ は c.c.c. をみたす”}.$$

2. **7.2.6** の f が表わす ω の部分集合は，無限集合でありかつその補集合も無限集合である．

3. P を強制概念とし各 $i \in I$ に対し D_i は P-稠密であるとする．フィルター G ($\subseteq P$) が条件 $\forall i \in I[D_i \cap G \neq \phi]$ をみたすとき，G は $\{D_i \mid i \in I\}$ **に関し** P-generic フィルターであるという．κ を無限基数とする．次の主張(の全称解釈)を (A_κ) で表わす：

(A_κ) $\left\{\begin{array}{l} P \text{ が c.c.c. をみたす強制概念で添数集合 } I \text{ は } |I| \leq \kappa \text{ なるもの} \\ \text{とする．各 } D_i \text{ が } P\text{-稠密ならば，} \{D_i \mid i \in I\} \text{ に関する } P\text{-generic} \\ \text{フィルターが存在する．} \end{array}\right.$

このとき $(A_{\aleph_0})$ が成り立つことを証明せよ．また $(A_{2^{\aleph_0}})$ は成立しないことを示せ．($P = H(\omega, 2)$ が反例となる．)

注意 $\forall \kappa[\kappa < 2^{\aleph_0} \to (A_\kappa)]$ という主張を**マーチンの公理**といい (MA) で表わす．興味があるのは $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ が成り立つ場合である．

4. P を強制概念とする．$u \subseteq P$ が**鎖** [**全非鎖**] であるとは u のどの 2 要素も比較可能である [比較不可能である] ことである．

$$\forall p \in P([p] \text{ は鎖である})$$

という条件をみたす P を**木**という．木 P が非可算で (すなわち $|P| > \aleph_0$) そのどの鎖もどの全非鎖も可算集合であれば，P は**ススリン木**であるという．次の主張を**ススリンの仮定**という：

(SH)：ススリン木は存在しない．

このとき次を証明せよ．

1)　¬(SH) ならば，次の条件をみたすススリン木 Q が存在する：

$$|Q|=\aleph_1 \wedge \forall q\in Q(|[q]_Q|>\aleph_0)$$

ここで　$[q]_Q=\{p\in Q\,|\,p\leq_Q q\}$　である．

2)　$(A_{\aleph_1})\to$(SH) が成り立つ．

5．ブール代数値モデル　A を空でない集合とし，A 上の強制言語 $\mathscr{F}(A)$ を考える．(A は可算集合でなくてもよい．)

定義 1．　B は与えられたブール代数とする．A 上の ***B*-値構造**とは，$\mathscr{F}(A)$ の文たちの集合から B への写像 $\|\ \|_B$ と A とからなるシステム

$$\langle A, \|\ \|_B\rangle$$

で，次の条件がみたされるもののことである．(添字 B を省略する．)

1°)　$\|a=a\|=1$　　(1 は B の最大元)．

2°)　$\|a=b\|=\|b=a\|$．

3°)　$\|\varphi(a)\|\cap\|a=b\|\leq\|\varphi(b)\|$．

4°)　$\|\varphi\vee\psi\|=\|\varphi\|\cup\|\psi\|$．

5°)　$\|\neg\varphi\|=\|\varphi\|'$．

6°)　$\|\exists x\varphi(x)\|=\bigvee\{\|\varphi(a)\|:a\in A\}$．

ここに，a, b は $\mathscr{F}(A)$ の定数記号(すなわち A の要素)を表わし，$\cap$，$\cup$，$'$ はブール演算であり，$\leq$ は **1.4** の(2)で定義された B 上の順序である．また $S\subseteq B$ に対し，$\bigvee S$ は S の最小上界で $\sup S$ とも書かれる．6°)の右辺は必ず存在するものと仮定する．▨

定理 2．　$\mathscr{F}(A)$ の文 φ が($\mathscr{F}(A)$ 上の)述語論理で証明可能ならば，$\|\varphi\|=1$ である．▨

問 1．　定理 2 を証明せよ．(述語論理の知識を仮定する．[28]，[33]を参照．公理系と推論規則は補遺に載せてある．)　▨

定義 3．　$\langle M,\in\rangle$ を ZFC の推移モデルとし，$B\in M$ とする．B が ***M*-完備ブール代数**であるとは，B がブール代数であって，

$$\forall S\in M[S\subseteq B\to\bigvee S \text{ が存在する}]$$

をみたすときをいう．▨

以下では，M を ZFC の可算推移モデル，B を M-完備ブール代数，$P=B-\{0\}$ とする．ここで 0 は B の最小元である．(可算性は，ここだけの議論においては不要であるが，generic フィルターを取り扱う時点で必要になる．)

定義 4. P を強制概念として，強制関係 $\Vdash$ を定義する(**7.3.6**)．このとき $\mathcal{F}(M)$ の文 φ に対し

(1) $\|\varphi\|_B=\|\varphi\|=\bigvee\{p\in P\,|\,p\Vdash\varphi\}$

と定義する．▨

定理 5. 定義4の下で $\langle M, \|\ \|\rangle$ は M 上の B-値構造である．これを

$$M^{(B)}$$

で表わす．▨

定義可能性補題(**7.3.7**)と $B\in M$ とにより，$\{p\in P\,|\,p\Vdash\varphi\}$ は M の要素であるから，B の M-完備性により，$\|\varphi\|$ は常に存在する．

問 2. 定理5を証明せよ．すなわち(1)の $\|\ \|$ は定義1の6条件を満足する．▨

定理 6. $\mathcal{F}(M)$ の文 φ が ZFC の公理ならば，定義4の $\|\ \|$ に対し，$\|\varphi\|=1$ である．▨

これにより，$M^{(B)}$ を ZFC の**ブール代数値モデル**という．定理6の証明は少し手間がかかるので解答を省く．

定理 **2** と **6** によって，例えば連続体仮説 CH の独立性，すなわち ZFC+$\neg$CH の無矛盾性を証明するには，

$$\|\mathrm{CH}\|_B\neq 1$$

となるような M-完備ブール代数 B が求められればよいことがわかる．なぜなら，もし ZFC$\vdash\varphi$ なら，推論規則はブール値が 1 であることを保存する(問1の解答参照)から $\|\varphi\|=1$ が従う．よって

$$\mathrm{ZFC}\nvdash\mathrm{CH}.$$

ゆえに ZFC+$\neg$CH は無矛盾である．詳細は省略する．

参 考 書

公理的集合論に関する主な書物としては，次のものがある．（数理論理学の本の中にその一部として公理的集合論を納めてあるものもある．それは二，三ここに挙げた．）

［1］ J. Bell & M. Machover, *A Course in Mathematical Logic*, North-Holland (1977).

［2］ P. J. Cohen（近藤基吉 他訳），連続体仮説，東京図書(1972).

［3］ D. van Dalen, H. C. Doets, H. de Swart, *Sets: Naive, Axiomatic and Applied*, Pergamon (1978).

［4］ F. Drake, *Set Theory, An Introduction to Large Cardinals*, North-Holland (1974).

［5］ H. Enderton, *Elements of Set Theory*, Academic Press (1977).

［6］ T. J. Jech, *Set Theory*, Academic Press (1978).

［7］ K. Kunen, *Set Theory, An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland (1980).

［8］ K. Kuratowski & A. Mostowski, *Set Theory: with an Introduction to Descriptive Set Theory*, North-Holland, 2nd ed. (1976).

［9］ A. Lévy, *Basic Set Theory*, Springer-Verlag (1979).

［10］ E. Mendelsohn, *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nostrand 2nd ed. (1979).

［11］ J. D. Monk, *Introduction to Set Theory*, McGraw-Hill (1969).

［12］ A. Mostowski, *Constructible Sets with Applications*, North-Holland (1969).

［13］ 難波完爾，集合論，サイエンス社 (1975).

［14］ J. Shoenfield, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley (1967).

［15］ 竹内外史，現代集合論入門，日本評論社 (1971).

［16］ G. Takeuti & W. Zaring, *Introduction to Axiomatic Set Theory*, Springer-Verlag 2nd ed. (1982).

［17］ G. Takeuti & W. Zaring, *Axiomatic Set Theory*, Springer-Verlag (1973).

以上のほかにも沢山ある．本書に続いて，更に集合論を勉強されたい読者は[4], [6], [7], [9], [17]などを読まれることをおすすめする．それによって本書では触れることができなかった大基数の話題，組合せ論的集合論，generic 拡大の更に進んだ応用，ブール代数値の集合論などを学ぶことができる．演習問題として触れただけで，詳細を割愛せざるを得なかったブール代数値の集合論は非常に大切な手法を教えるが，これについては，いま述べた[6], [7], [17]のほかに邦語で[13]を読むことができる．またそれだけを書いた

［18］ J. L. Bell, *Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set*

Theory, Clarendon Press·Oxford (1977).

もある. 選択公理にまつわる話題をまとめたものに

[19] T. J. Jech, *The Axiom of Choice*, North-Holland (1973).

がある. 次に

[20] K. Gödel, *Consistency-Proof for the Generalized Continuum Hypothesis*, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 25 (1939), 220-224.

[21] K. Gödel, *The Consistency of the Continuum Hypothesis*, Princeton University Press (1940).

はゲーデルの仕事の原典である. [21]ではクラス変数を許す形式的体系にもとづく公理的集合論によって AC と GCH の無矛盾性が証明されている. 古典にふさわしい風格のあるモノグラフである. 一度はひもといてみるべき重要な書物であると思う. (本書では, クラス変数をもつ形式的体系による集合論に言及しなかった. それは通常, Von Neuman-Bernays-Gödel の集合論と呼ばれるものである. このほかにも, このような集合論の体系がある.)

本書の執筆にあたって, 上掲の書物のうち多くのもの(とくに[1], [3], [4], [9]など)を参照させていただいた. このほかにも若干の文献(原論文)を参照した. とくに第7章は

[22] J. R. Shoenfield, Unramified Forcing, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 13, Amer. Math. Soc. (1971), 357-381

によった. また歴史的解説では

[23] E. T. Bell (田中　勇 他訳), 数学をつくった人びと(IV), 数学新書 31, 東京図書 (1963).

[24] N. Burbaki (村田　全・清水達雄訳), 数学史, 東京図書 (1970).

[25] G. Cantor (功力金二郎・村田　全訳解説), 超限集合論, 共立出版 (1979).

[26] P. E. Johnson, *A History of Set Theory*, The Prindle, Weker & Schmidt (1972).

[27] E. Zermelo 編, Contor 全集 (1966).

などから引用したところがある. また次の書物もしばしば引用した.

[28] N. Crossley (田中尚夫訳), 現代数理論理学入門, 共立出版 (1977).

素朴集合論に関しては沢山の邦語の書物があり, それらの中には集合論公理に触れているものもある. 手もとにあるものを二, 三紹介しておこう:

[29] 井関清志, 集合と論理, 新曜社 (1979).

[30] 赤　攝也, 集合論入門, 培風館 (1957).

[31] 松村英之, 集合論入門, 朝倉書店 (1966).

なお,

[32] P. R. Holmos (富川　滋訳), 素朴集合論, ミネルヴァ書房 (1975).

は標題が素朴集合論となっているが, 集合論公理系にもとづいていて, 公理に関連する説明が載っている. 公理的集合論は, 本書でもそうであったように形式的体系や数理論理学にかかわっている. これについての邦語の書物もかなり沢山出版されている. ここでは次の本を一つ挙げるにとめる.

[33] 福山　克, 数理論理学 (現代数学レクチャーズ B-6), 培風館 (1980).

問題略解

第 1 章

1.2　問 1, 問 2.：省略

問 3.　$\forall x(x \notin \phi) \wedge \forall x(x \notin \phi')$ とすれば $\forall x(x \in \phi \leftrightarrow x \in \phi')$. 外延公理により $\phi = \phi'$.

1.3　問 1, 2, 3.：省略.

問 4.　1)　関数でない. 2)　関数である.

問 5.　省略.

1.4　問 1.：省略.

問 2.　1)　$\{\phi\}$,　2)　$\{\phi, \{\phi\}\}$,　3)　$\{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

問 3.　1)　$A = \{0\}$, $B = \{1\}$ とすれば, $\{0, 1\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, $\{0, 1\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$.
2)　$A \in \mathcal{P}(A)$ だから $A \in A$ となる(**1.8** 参照)

問 4.　$f: A \to B$ が単射のとき, $X, X' \subseteq A$ で $X - X' \neq \phi$ なら $x \in X - X'$ なる x をとると, $f(x) \in f(X) - f(X')$. $\therefore$ $f(X) \neq f(X')$. f が全射のとき, 任意に $Y \subseteq B$ をとる. $f^{-1}(Y) = X$ とすると f は全射だから $f(X) = Y$ となる.

問 5.　補元の一意性を利用する. 例えば (*e*) は: $(a' \cap b') \cap (a \cup b) = (a' \cap b' \cap a) \cup (a' \cap b' \cap b) = O$, $(a' \cap b') \cup (a \cup b) = (a' \cup a \cup b) \cap (b' \cup a \cup b) = I$. $a \cup b$ の補元の一意性により $(a \cup b)' = a' \cap b'$. 他も同様.

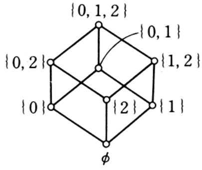
問 6.　吸収法則を利用する. $a \cup b = b$ なら左から $a \cap$ を施すことにより $a = a \cap (a \cup b) = a \cap b$. また $a = a \cap b$ なら右から $\cup b$ を施すことにより $a \cup b = (a \cap b) \cup b = b$.

問 7.　$\leq$ の定義と吸収法則から $b \cap d \leq b \leq b \cup d$. もし $b \cap d = b$ なら $b \leq d$ となり仮定に反する. よって $b \cap d < b$. $b < b \cup d$ についても同様.

問 8.　$a, b \leq a \cup b$ は問 7 の証明で示した. $a, b \leq x$ ならば $a \cup x = x$, $b \cup x = x$. よって $(a \cup b) \cup x = a \cup (b \cup x) = a \cup x = x$. $\therefore$ $a \cup b \leq x$. ゆえに $a \cup b = \mathrm{l.u.b}\{a, b\}$. $a \cap b$ についても同様.

問 9.　1)　$A \cup B = B \leftrightarrow A \subseteq B$ が容易にわかる.

2)



1.5　問 1.　1)　もし $h: C \xrightarrow{1\text{-}1} A$ が存在すれば $f: A \xrightarrow{1\text{-}1} B$ が存在する. $f \circ h$ は C から B への単射を与えるから $\overline{\overline{C}} \leq \overline{\overline{B}}$ となってしまう. 2)　同様.

問 2. 1) $f: A \xrightarrow{1\text{-}1} B$, $g: C \xrightarrow{1\text{-}1} D$ とする. $h(x)=f(x)$ if $x \in A$, $=g(x)$ if $x \in C$ とすれば, $h: A \cup C \xrightarrow{1\text{-}1} B \cup D$ である. 2) 1)の系である.

1.6 問 1. {区間 $(f(x-0), f(x+0))|x$ は f の不連続点} は, 端点を別にすれば重なり合わない区間たちの集合である.

問 2. A, B が可算集合のとき, $f: \omega \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} A$, $g: \omega \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} B$ なる f, g を確定的にとることができる. f, g を使って容易に $h: \omega \xrightarrow[\text{onto}]{} A \cup B$ をつくることができる. よって $A \cup B$ は可算集合である.

問 3. $\pi'(k)=k(k+1)/2$ とおく. $\langle n, i\rangle \neq \langle m, j\rangle$ としよう. $n+i=m+j$ なら $n \neq m$ であって $\pi(n, i)=\pi'(n+i)+n$, $\pi(m, j)=\pi'(n+j)+m$. ∴ $\pi(n, i) \neq \pi(m, j)$. $n+i>m+j$ なら $\pi(n, i) \geq \pi'(n+i) \geq \pi'(m+j+1)>\pi(m, j)$. ∴ $\pi(n, i) \neq \pi(m, j)$. よって π は単射. 今度は任意に $k \in \omega$ をとる. $\pi'(l) \leq k<\pi'(l+1)$ なる l がある[π' は単調増大で $\pi'(0)=0$]. $n=k-\pi'(l)$ とすれば $l \geq n$. [∵ $l-n=l-k+\pi'(l) \geq l-\pi'(l+1)+1+\pi'(l)=0$] よって $i=l-n$ とおけば $k=\pi(n, i)$. ゆえに π は全射.

1.7 問 1. 0を00, 1を10, 2を11でコード化すると, 各 $f \in {}^{\omega}\{0, 1, 2\}$ に対し $g \in {}^{\omega}\{0, 1\}$ を対応づける対応が定まり, この対応は全単射である. A が2個以上の元をもつ有限集合のときも同様なコード化を行えばよい.

演習問題 I

1, 2, 3, 4: 省略.

5. (⇒) は明白. (⇐): 任意に $c \in C$ をとる. $g(x)=c$ なる一つの $x \in A$ をとって $h(c)=f(x)$ と定義する(AC が必要). このとき任意の $a \in A$ に対し $(h \circ g)(a)=h(g(a))=f(x)$. ここに x は h の定義で用いた $g(x)=g(a)$ なる一つの x である. 仮定により $f(x)=f(a)$. よって $(h \circ g)(a)=f(a)$. すなわち $h \circ g=f$.

6. 全射なること. $0=\pi^*(0, 0)$. そこで $k>0$ とし $l<k$ なる l に対し $\exists m, n$: $\pi^*(m, n)=l$ とせよ. $k=2j$ なら $k=\pi^*(0, j)$. $k=2j+1$ なら, $\pi^*(m, n)=j$ なる m, n をとる: $j=2^m(2n+1)-1$. ∴ $2(j+1)=2^{m+1}(2n+1)$. ∴ $k=\pi^*(m+1, n)$. これで帰納法(**累積帰納法**という)が完成し $\forall k \exists m, n\,[\pi^*(m, n)=k]$ が示された. 単射なること. $\langle m, n\rangle \neq \langle k, l\rangle$ とする. $m=k$ なら $n \neq l$. 明白に $\pi^*(m, n) \neq \pi^*(m, l)$. $m>k$ なら, $\pi^*(m, n)-\pi^*(k, l)=2^k(2^{m+1-k} \cdot n+2^{m-k}-2l-1)$. 右辺の( )内は(正又は負の)奇数であるから $\neq 0$. ∴ $\pi^*(m, n) \neq \pi^*(k, l)$.

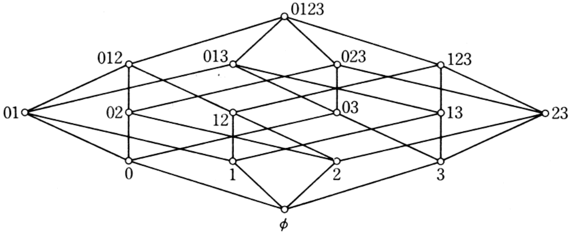
7. $A \cap B=\phi$ としてよい. $A \sim A'$, $A=A' \cup \{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$, $A' \cap \{a_0, a_1, a_2, \cdots\}=\phi$ なる A', $a_0, a_1, a_2, \cdots$ がある. (AC による.) $A \cup B \sim A' \cup \{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ $(=A)$ が成り立つことは明白.

8. $f: A \xrightarrow{1\text{-}1} B$, $g: C \xrightarrow{1\text{-}1} D$ とする. $h: A \times C \longrightarrow B \times D$ を $h(a, b)=\langle f(a), g(b)\rangle$ によって定義すれば, h は1-1. $\Phi: {}^{C}A \longrightarrow {}^{D}B$ を次のように定義する. $b_0 \in B$ を一つとって固定し, 各 $h \in {}^{C}A$ に対し: $\Phi(h) \in {}^{D}B$ を $d \in g(C)$ に対し $d=g(c)$ なる一意的な c をとって $\Phi(h)(d)=(f \circ h)(c)$ と定める. $g(C) \neq D$ なら $d \in D-g(C)$ に対し $\Phi(h)(d)=b_0$ とする. このとき, $h, h' \in {}^{C}A$, $h \neq h'$ なら, $h(c) \neq h'(c)$ なる c があるから f の1-1性によって $\Phi(h)(g(c))=(f \circ h)(c) \neq (f \circ h')(c)=\Phi(h')(g(c))$. よって $\Phi(h) \neq \Phi(h')$. すなわち Φ は1-1である.

9. $f: A \cup B \longrightarrow X$ に対し $\Phi_1(f): A \longrightarrow X$, $\Phi_2(f): B \longrightarrow X$ を, $a \in A$ なら

$\Phi_1(f)(a)=f(a)$, $b\in B$ なら $\Phi_2(f)(b)=f(b)$ によって定義する．$f\neq g$ なら $f(x)\neq g(x)$ なる $x\in A\cup B$ があるから $\Phi_1(f)(x)\neq\Phi_1(g)(x)$ か $\Phi_2(f)(x)\neq\Phi_2(g)(x)$ である．そこで $\Phi(f)=\langle\Phi_1(f), \Phi_2(f)\rangle$ とすれば，$\Phi: {}^{(A\cup B)}X\longrightarrow {}^{A}X\times{}^{B}X$ は 1-1 である．

10.



11. $A=\{\phi\}$, $B=\{\{\phi\}\}$ とすれば $A\in B$ であるが $\mathcal{P}(A)\notin\mathcal{P}(B)$.

12. $\omega!\subset{}^{\omega}\omega$ であるから $\overline{\overline{\omega!}}\leq\overline{\overline{{}^{\omega}\omega}}$ である．逆の不等式を証明するために $\Phi: {}^{\omega}\omega\longrightarrow\omega!$ を次のように定義する．各 $f\in{}^{\omega}\omega$ に対し，まず $\Phi(f)(2n)=\pi(2n, f(n))$ とする．$\omega-\{\Phi(f)(2n)\mid n\in\omega\}$ は無限集合であるからこれを小さい順に並べて $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$ とする．このとき $\Phi(f)(2n+1)=a_n$ と定める．$\Phi(f)\in\omega!$ である．$f\neq g$ なら $f(n)\neq g(n)$ なる n があるから $\Phi(f)(2n)\neq\Phi(g)(2n)$，したがって $\Phi(f)\neq\Phi(g)$. よって Φ は 1-1 である．∴ $\overline{\overline{{}^{\omega}\omega}}\leq\overline{\overline{\omega!}}$.

第2章

2.2 問 1. $\varphi(x)\equiv x=z$ のとき：等号公理(ii), (iii)による．$\varphi(x)\equiv x\in z$ のとき：(iv)による．$\varphi(x)\equiv z\in x$ のとき：外延公理による．次に帰納法の仮定として ψ_1, ψ_2 に対し(vi)が成り立つとする．$\varphi(x)\equiv\psi_1(x)\overset{\vee}{\wedge}\psi_2(x)$ のとき：$(x=y\wedge\psi_1(x))\overset{\vee}{\wedge}(x=y\wedge\psi_2(x))$ より帰納法の仮定を用いて $\psi_1(y)\overset{\vee}{\wedge}\psi_2(y)$ なることがわかる．$\varphi(x)\equiv\neg\psi_1(x)$ のとき：もし $\psi(y)$ なら $x=y\wedge\psi_1(y)$ となるから $\psi_1(x)$. これは $\varphi(x)$ と矛盾する．∴ $\neg\psi_1(y)$. $\varphi(x)\equiv\psi_1(x)\rightarrow\psi_2(x)$ のとき：これは $\varphi(x)\leftrightarrow\neg\psi_1(x)\vee\psi_2(x)$ より従う．$\varphi(x)\equiv\exists z\,\psi_1(x, z)$ のとき：仮定により $\psi_1(x, z)$ なる z がある．帰納法の仮定によって $\psi_1(y, z)$ が成り立つから $\exists z\,\psi_1(y, z)$, i. e. $\varphi(y)$.（述語論理の形式的体系上でこれを証明するにはその体系で成り立ついくつかの法則に準拠しなければならない．）

問 2. 省略.

2.3 問 1. 1) $x\in\bigcup\phi\leftrightarrow\exists y\in\phi\,(x\in y)$. 後者は成立しない．よって $\forall x(x\notin\bigcup\phi)$，すなわち $\bigcup\phi=\phi$. 2) $y\in\bigcup\{x\}\leftrightarrow\exists z\in\{x\}[y\in x]\leftrightarrow y\in x$.

問 2. **2.3.6** により論理記号 $\vee$ の結合法則に帰着する．

2.4 問 1. $\forall z(z\in\{\phi\}\leftrightarrow z\subseteq\phi)$. **2.4.1** により $z\in\{\phi\}\rightarrow z\subseteq\phi$. 逆に $z\subseteq\phi$ なら $\forall t(t\in z\rightarrow t\in\phi)$. これは $t\in z$ が常に偽のときのみ正しい．よって $z=\phi$. i. e. $z\in\{\phi\}$. 次に $z\subseteq\{\phi\}$ すなわち $\forall t(t\in z\rightarrow t\in\{\phi\})$ とすれば，常に $t=\phi$ でなければならないから $z=\phi\vee z=\{\phi\}$ である．よって $z\subseteq\{\phi\}\rightarrow z\in\{\phi, \{\phi\}\}$. 逆の ← は明白であるから $\mathcal{P}(\{\phi\})=\{\phi, \{\phi\}\}$.

2.5 問 1. 互いに素とは，一方に入れば他方には入らないということである．

問 2. 1) $u=y, \phi(x)\equiv x\in y\wedge x\notin z$ として(3)を適用せよ． 2) $u=\bigcup\bigcup y, \phi(x)\equiv \exists t(\langle x, t\rangle\in y)$ として(3)を適用せよ．

2.6 問 1. $x_1\in x_2\in\cdots\in x_n\in x_1$ なる集合 $x_1, \cdots, x_n$ があれば，$a=\{x_1, \cdots, x_n\}$ が正則性公理の反例になる．

2.8 問 1. 1) **2.5** 例 1 により集合 $u\cap v=\{x\in u\cup v|x\in u\wedge x\in v\}=\{x|x\in u\cup v\wedge x\in u\wedge x\in v\}$ [**2.8.3**]$=\{x|x\in u\wedge x\in v\}$ [**2.8.3**]＝クラスとしての共通部分．
2) 公理(III)で存在が保証されている集合 $u\cup v$ に対し **2.3.6** により $x\in u\cup v\leftrightarrow x\in u\vee x\in v$ である．これに **2.8.2** を適用すれば $\{x|x\in u\cup v\}=\{x|x\in u\vee x\in v\}=u\cup v$ [**2.8.4** の証明]．

問 2. 任意の論理式 $\varphi(x)$ に対し $\forall x(\varphi(x)\rightarrow x=x)$ であるから $\{x|\varphi(x)\}\subseteq\{x|x=x\}=V$.

問 3. もし B が集合なら **2.8.10** により A が集合になってしまう．

問 4. $A-u=v$ が集合ならば，$A\subseteq u\cup v$ であるから A が集合になってしまう．

2.9 問 1. 問 2: 省略．

問 3. $\langle x, y\rangle\in u\rightarrow x, y\in\bigcup\bigcup u$ であるから，$\mathrm{Dom}(u), \mathrm{Rng}(u)\subseteq\bigcup\bigcup u$. よって $\mathrm{Dom}(u), \mathrm{Rng}(u)$ は集合である．

問 4. $A=\{\{\langle t, t\rangle|t\in x\}|x\in V\}$ とおくと $A\subset\mathrm{Func}_1$. よってもしも Func_1 が集合なら A も集合であるから $B=\{y|\exists f\in A[y=\mathrm{Rng}(f)]\}=\{y\in\mathscr{P}^3(A)|\exists f\in A[y=\mathrm{Rng}(f)]\}$ は集合となる．ところが $\exists f\in A[y=\mathrm{Rng}(f)]\leftrightarrow\exists x[y=\mathrm{Rng}(\{\langle t, t\rangle|t\in x\})]\leftrightarrow\exists x[y=x]\leftrightarrow y=y$ であるから B は V に等しい．これは V が固有クラスであることに反する．ゆえに Func_1 は固有クラスでなければならない．[別解] Func_1 が集合ならこれを u とおくと $f=\{\langle u, \phi\rangle\}\in\mathrm{Func}_1=u$ であるから，$u\in\{u\}\in\{\{u\}, \{u, \phi\}\}\in f\in u$ となって **2.6** の問 1 に反する．

演習問題 II

1. n についての帰納法による．

2. $\{x_1, \cdots, x_n\}$

3. n についての帰納法．$n-1$ について成立するとすれば，$\langle x_1, \cdots, x_n\rangle=\langle y_1, \cdots, y_n\rangle\leftrightarrow\langle x_1, \langle x_2, \cdots, x_n\rangle\rangle=\langle y_1, \langle y_2, \cdots, y_n\rangle\rangle\leftrightarrow x_1=y_1\wedge\langle x_2, \cdots, x_n\rangle=\langle y_2, \cdots, y_n\rangle\leftrightarrow x_1=y_1\wedge x_2=y_2\wedge\cdots\wedge x_n=y_n$.

4. $A_1\cup\cdots\cup A_n=\{x|x\in A_1\vee\cdots\vee x\in A_n\}$. $\cap$ についても同様．

5. できない．$y\cup z=\{t\in\square|t\in y\vee t\in z\}$ という表現の $\square$ のところにおくべき集合がみつからない．よって $y\cup z$ は公理(III)にもとづかざるを得ない．

6. $\bigcap u=\{t\in\bigcup u|\forall x\in u(t\in x)\}$ であるから集合である．$\bigcap\{x\}=x$. $\bigcap\{x, y\}=x\cap y$. $\bigcap\phi=V$.

7. 1), 2), 3)は省略． 4) $\langle x, y\rangle\in(R\cap S)\circ T\leftrightarrow\exists z[\langle x, z\rangle\in R\cap S\wedge\langle z, y\rangle\in T]\leftrightarrow\exists z[(\langle x, z\rangle\in R\wedge\langle z, y\rangle\in T)\wedge(\langle x, z\rangle\in S\wedge\langle z, y\rangle\in T)]\rightarrow\exists z[\langle x, z\rangle\in R\wedge\langle z, y\rangle\in T]\wedge\exists z[\langle x, z\rangle\in S\wedge\langle z, y\rangle\in T]\leftrightarrow\langle x, y\rangle\in R\circ T\wedge\langle x, y\rangle\in S\circ T\leftrightarrow\langle x, y\rangle\in(R\circ T)\cap(S\circ T)$.

5) N を正整数全体の集合とし，$R, S, T\subset N\times N$ とする．$R=\{\langle x, z\rangle|(2x)|z\}$, $S=\{\langle x, z\rangle|(3x)|z\}$, $T=\{\langle z, y\rangle|(z$ は 2 の倍数で $2y=z)\vee(z$ は 3 の倍数で $3y=z)\}$ と

する． $R\cap S=\{\langle x, z\rangle \mid (6x)\mid z\}$， $R\circ T=\{\langle x, y\rangle \mid \exists q[y=xq]\}=S\circ T$， $(R\cap S)\circ T=\{\langle x, y\rangle \mid \exists q[y=2xq \vee y=3xq]\}$ である．よって $\langle x, x\rangle \in (R\circ T)\cap(S\circ T)$ であるが $\langle x, x\rangle \notin (R\cap S)\circ T$.

8. 省略.

9. 1) $F\restriction D=G\restriction D$ なら，任意に $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in F\cup G$ をとると，$x\in D$ のとき $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in (F\cup G)\restriction D=F\restriction D=G\restriction D$. ∴ $z=y$. $x\in \mathrm{Dom}(F)-D$ なら $\langle x, y\rangle$, $\langle x, z\rangle \in (F\cup G)\restriction(\mathrm{Dom}(F)-D)=F\restriction(\mathrm{Dom}(F)-D)$ ∴ $y=z$. $x\in\mathrm{Dom}(G)-D$ のときも同様にして $y=z$. ゆえに $F\cup G$ はクラス関数．逆に $F\cup G$ がクラス関数なら $x\in D$ に対し $\langle x, y\rangle \in F$, $\langle x, z\rangle \in G$ とすると $\langle x, y\rangle, \langle x, z\rangle \in F\cup G$. ∴ $y=(F\cup G)`x=z$. よって $F`x=G`x$. すなわち $F\restriction D=G\restriction D$. 2) 求むる条件は (＊) $\mathrm{Rng}(F)\cap\mathrm{Rng}(G)\subseteq F``D$. 以下その証明：$F\cup G$ が単射とする．任意に $y\in\mathrm{Rng}(F)\cap\mathrm{Rng}(G)$ をとると $\langle x, y\rangle \in F \wedge \langle x', y\rangle \in G$ なる $x, x'$ がある．よって $\langle x, y\rangle, \langle x', y\rangle \in F\cup G$. 単射性から $x=x'$, ∴ $x\in D$. ∴ $y\in F``D$. 逆に(＊)が成り立てば，$x\neq x'$, $\langle x, y\rangle \in F\cup G \wedge \langle x', y\rangle \in F\cup G$ とすると，F, G が単射であるから $\langle x, y\rangle \in F\wedge\langle x', y\rangle \in G$ または $\langle x, y\rangle \in G\wedge\langle x', y\rangle \in F$. どちらでも同様だから前者とする．よって $y\in\mathrm{Rng}(F)\cap\mathrm{Rng}(G)$. ゆえに $x\in D$. したがって $G`x=y$. G は単射だから $x=x'$. 不合理．よって $F\cup G$ は単射でなければならない．単射にならない例：$F=\{\langle x, x\rangle \in \mathcal{R}\times\mathcal{R} \mid 0\leq x\leq 2\}$, $G=\{\langle x, x\rangle \in \mathcal{R}\times\mathcal{R} \mid 1\leq x\leq 2\}\cup\{\langle x, +1, x\rangle \in \mathcal{R}\times\mathcal{R} \mid 2<x<3\}$. グラフをかいてみよ．

10. $x\neq x'$, $x, x'\subseteq u$ をとる．例えば $t\in x-x'$ としよう．f は1-1だから $f`t\in g`x-g`x'$. よって $g`x\neq g`x'$. また，任意に $y\subseteq v$ をとるとき，$x=f^{-1}``y$ とすれば，$f$ が全射だから $f``x=y$, i. e. $g`x=y$. よって g は全射.

第3章

3.1 問 1. $R\circ R\subseteq R \leftrightarrow \forall x, z[\exists y(xRy\wedge yRz)\rightarrow xRz] \leftrightarrow \forall x, z\forall y[xRy\wedge yRz\rightarrow xRz]$.

問 2. 省略.　　**問 3.** 省略.

問 4. $A=\{a, b, c\}$, $R_1=\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$, $R_2=\{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, a\rangle\}$ とする．このとき $R_1\cap R_2=\{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$ は全順序でない．

3.2 問 1. $u-\mathrm{Seg}_r(a)\cup\{a\}\neq\phi$ であるから r-最小元 b がある．b は a の直後元である．また $v\subset u \wedge \forall x\in v(x<_r a)$ なる $a\in u$ があるとする．$\{y \mid \forall x\in v(x<_r y)\}$ は空でないから r-最小元 b をもつ．b は v の直後元である．

問 2. **3.10** に詳述してある．

3.3 問 1. $\alpha\neq 0$ だから $0\subset\alpha$. Trans(0). よって **3.3.6** により $0\in\alpha$.

問 2. $\alpha\neq 0\wedge\mathrm{Lim}(\alpha)$ とする．$\beta\in\alpha$ なら **3.3.20** により $\beta\in\gamma\in\alpha$ なる γ がある．∴ $\beta\in\bigcup\alpha$, ∴ $\alpha\subseteq\bigcup\alpha$. また $\mathrm{Trans}(\alpha)$ より $\bigcup\alpha\subseteq\alpha$. ∴ $\alpha=\bigcup\alpha$. よって $\mathrm{Lim}(\alpha)\rightarrow\alpha=\bigcup\alpha$. 逆に $\alpha=\bigcup\alpha$ とせよ．もし $\alpha=\beta+1$ なる β があれば，$\bigcup\alpha=\bigcup(\beta\cup\{\beta\})=(\bigcup\beta)\cup\beta\subseteq\beta\subsetneq\alpha$. 不合理．

問 3. 一般に全順序集合の部分集合 u に対し u が最小元をもてば $\inf u=\min u$ である．$u\subset\mathrm{OR}$ なら u は最小元 α をもつ．よって $\inf u=\min u$. $\alpha\subseteq\bigcap u$ は明らか．任

意に $\beta\in\bigcap u$ をとる．特に $\alpha\in u$ なるゆえに $\beta\in\alpha$． ∴ $\bigcap u\subseteq\alpha$． ∴ $\alpha=\bigcap u$．

問 4. **3.2** 問1による．直接証明：$\alpha=\bigcup u$ とする．u が最大元をもたなければ α は u の直後元である．u が最大元をもてばそれは α で，したがって $\alpha+1$ は直後元である．

問 5. $\alpha<\beta$ なら $\alpha\in\beta$． ∴ $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}\subseteq\beta$．**3.3.10** により $\alpha+1\leq\beta<\beta+1$．

3.4 **問 1.** 特に $\alpha=0$ に対し $\forall\beta<0\varphi(\beta)\to\varphi(0)$．前提は偽だから $\varphi(0)$ が成り立たなければならない．

問 2. A を定義する論理式を $\varphi(x)$ とすると仮定は $\forall\alpha(\forall\beta<\alpha\varphi(\beta)\to\varphi(\alpha))$ にほかならない．よって **3.4.1** により $\forall\alpha\varphi(\alpha)$，すなわち $\forall\alpha[\alpha\in A]$． ∴ $\mathrm{OR}\subseteq A$．

問 3. $\forall\gamma<\beta[\gamma\leq f`\gamma]$ と仮定する．$f$ は同型対応だから $\gamma<\beta\to\gamma\leq f`\gamma\in f`\beta$． ∴ $\beta\subseteq f`\beta$，すなわち $\beta\leq f`\beta$．

問 4. $\langle\alpha,<\rangle\cong\langle u,r\rangle$，$\alpha<\beta$ より $\langle\alpha,<\rangle$ は $\langle v,s\rangle$ のある始切片に同型．後者は $\langle u,r\rangle$ と同型．

問 5. **3.4.7** で $\forall\alpha>0$ を $\forall\alpha<\xi[\alpha>0\to\cdots]$ で $\forall\alpha$ を $\forall\alpha<\xi$ でおきかえる．

3.5 **問 1.** $f`n=(f\restriction(n+1))`n$ であることに注意．$\langle x,y\rangle\in G_1\equiv\langle x`(\mathrm{Dom}(x)-1),y\rangle\in G$ によって定義すると $f`(n+1)=G_1`(f\restriction(n+1))$ となる．

問 2. α を与える．$f`0=\alpha$，$f`(n+1)=(f`n)+1$ $(n\in\omega)$ とし $\beta=f``\omega$ とすれば β は求めるもの．

3.6 **問 1**：省略．

問 2. 1) $y\subseteq\mathrm{TC}(x)$ とする．帰納法の仮定として $\bigcup^n y\subseteq\mathrm{TC}(x)$ とし $t\in\bigcup^{n+1}y$ を考える．$t\in z\in\bigcup^n y$ なる z がある．よって $t\in z\subseteq\mathrm{TC}(x)$，i.e. $t\in\mathrm{TC}(x)$． ∴ $\bigcup^{n+1}y\subseteq\mathrm{TC}(x)$． 2) は $\mathrm{Trans}(\mathrm{TC}(x))$ と 1)から直ちに従う．

問 3. $<_r$ が推移法則をみたすことを示せばよい．$x<_r y$ かつ $y<_r z$ とせよ．$x=z$ なら $y<_r x$ となり矛盾．$z<_r x$ なら $u=\{x,y,z\}(\subseteq u)$ は空でなく，$\forall t\in v\exists s\in v[s<_r t]$ をみたすから $r\mathrm{Wf}u$ に反する．よって $x<_r z$ でなければならない．

3.8 **問 1.** (i) $x\in V_{\beta+1}$，$y\in x$ なら $x\subseteq V_\beta$． ∴ $y\in V_\beta$． (ii) 帰納法の仮定として $\forall\gamma<\alpha\forall\beta<\gamma(V_\beta\in V_\gamma)$ とせよ．$\alpha=\gamma+1$ なら $V_\gamma\in\mathcal{P}(V_\gamma)=V_\alpha$．$\beta<\gamma$ については $V_\beta\in V_\gamma\in V_\alpha$，推移性から $V_\beta\in V_\alpha$．$\alpha\in\mathrm{Lim}$ のとき．$\beta<\alpha$ なる β に対し $\beta<\gamma<\alpha$ なる γ あり．$V_\beta\in V_\gamma\subseteq V_\alpha$ ∴ $V_\beta\in V_\alpha$． (iii) $\alpha>0$ とする．$\alpha\in\mathrm{Lim}$ なら明白．$\alpha\in\mathrm{Suc}$ のとき(ii)を用いて $V_\alpha=\bigcup\{V_\gamma|\gamma\leq\alpha\}=\bigcup\{V_{\beta+1}|\beta<\alpha\}$．

問 2. 1) $\rho(x)=0\leftrightarrow x\in V_1=\{0\{\leftrightarrow x=0$． 2) $\rho(x)=1\leftrightarrow x\in V_2-V_1\leftrightarrow x\in\{\{0\}\}\leftrightarrow x=\{0\}$． 3) $x\subseteq y$ とする．$y\subseteq V_{\rho(y)}$ であるから $x\subseteq V_{\rho(y)}$． ∴ $x\in V_{\rho(y)+1}$． ∴ $\rho(x)\leq\rho(y)$．

問 3. $\rho(0)=0<2=\rho(\{\{0\}\})$．しかし $0\notin\{\{0\}\}$．

問 4. $R=\{\langle x,y\rangle|\rho(x)<\rho(y)\}$ とする．もし R-無限下降列 $\cdots<_R x_n<_R\cdots<_R x_1<_R x_0$ が存在すれば，順序数の無限下降列 $\cdots<\rho(x_n)<\cdots<\rho(x_1)<\rho(x_0)$ が生ずるから不合理．よって R-無院下降列は存在しない．**3.7.2** とその注意により R は有基底的である．

3.9 **問 1.** **2.9.12** により $\mathrm{ZF}\vdash(\mathrm{IX})\leftrightarrow(\mathrm{IX}')$．公理$(\mathrm{IX}'')$は $\mathcal{P}(u)$ に対する選択関数の存在をいっているから$(\mathrm{IX}')\to(\mathrm{IX}'')$が成り立つ．逆に$(\mathrm{IX}'')$が成り立てば，任意の w に対し $\mathcal{P}(\bigcup w)$ の選択関数 f がある．$f\restriction w$ は w に対する選択関数である．よって $(\mathrm{IX}'')\to(\mathrm{IX}')$．

3.10 **問 1.** $2\cdot\omega$ は $\langle 2\times\omega, <_*\rangle$ と相似な順序数である．それは $\{0,1\}$ を ω 型に並べた順序であるから ω と相似である．

問 2. $\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$, $\alpha+2=\alpha\cup\{\alpha\}\cup\{\alpha+1\}$ である．よって $\alpha+1\in\alpha+2$, $\alpha+1\notin\alpha+1$. $\therefore$ $\alpha+1\neq\alpha+2$.

問 3. $\beta<\gamma$ とする．$\langle\alpha, <\rangle\cong\langle u, r\rangle$, $\langle\beta, <\rangle\cong\langle v, s\rangle$, $\langle\gamma, <\rangle\cong\langle w, t\rangle$ で，u, v, w は互いに素であるとする．$\langle v, s\rangle$ は $\langle w, t\rangle$ のある始切片 $\mathrm{Seg}_t(z)$ $(z\in w)$ に同型．このとき $\langle u\cup v, r\oplus s\rangle$ は $\langle u\cup w, r\oplus t\rangle$ の始切片 $\mathrm{Seg}_{r\oplus t}(z)$ に同型である．

3.11 **問 1.** γについての超限帰納法によって $\forall\beta<\gamma[\alpha+\beta<\alpha+\gamma]$ を証明する．帰納法の仮定として $\delta<\gamma\rightarrow\forall\beta<\delta[\alpha+\beta<\alpha+\delta]$ と仮定する．さて $\beta<\gamma$ としよう．$\gamma=\delta+1$ のとき，$\beta\leq\delta$ であるから帰納法の仮定により $\alpha+\gamma=(\alpha+\delta)+1\geq(\alpha+\beta)+1>\alpha+\beta$. $\gamma\in\mathrm{Lim}$ のとき，$\beta<\delta_1<\gamma$ なる δ_1 がある．よって帰納法の仮定により $\alpha+\gamma=\sup\{\alpha+\delta\,|\,\delta<\gamma\}\geq\alpha+\delta_1>\alpha+\beta$.

演習問題 III

1. $\gamma\leq\alpha+\xi$ なる最小のξをとる．$\xi<\beta$ である．ξ の最小性から $\gamma=\alpha+\xi$ が導かれる．

2. $u=\bigcap\{a\,|\,\phi\in a\wedge\forall x\in a[\{x\}\in a]\}$ は集合（$\neq\phi$）である．なぜなら(VI′)で存在が保証された一つの集合の部分クラスだからである．G を $\langle x, v, z\rangle\in G\equiv(x=0\wedge z=0)\vee\exists y\in u[\{y\}=x\wedge z=v\text{‘}y+1]$ とすれば，$\forall x\in u$: $F\text{‘}x=G\text{‘}\langle x, F\restriction\mathrm{Seg}_{\in|u}(x)\rangle$ なるクラス関数 F が定まる．$\alpha=F\text{“}u$ とおく．$\alpha\in\mathrm{Lim}$ である．[$\because$ まず，$\mathrm{Ord}(F\text{“}u)$ を示さねばならぬ．$\mathrm{Trans}(F\text{“}u)$ なること：それは各 $x\in u$ に対し （＊） $\forall z[z\in F\text{‘}x\rightarrow z\in F\text{“}u]$ なることである．いま，$\neg\mathrm{Tans}(F\text{“}u)$ と仮定しよう．よって(＊)が成立しない最小階数の $x\in u$ がある，それを x_0 とすれば，$x_0\in u$, $x\in u\wedge\rho(x)<\rho(x_0)\rightarrow$ (＊)，であり，さらに （⁂） $z_0\in F\text{‘}x_0\wedge z_0\notin F\text{“}u$ なる z_0 がある．$x_0\neq0$ だから，$y\in u\wedge\{y\}=x_0\wedge z_0=(F\text{‘}y)+1$ なるyがある．$\rho(y)<\rho(x_0)$ なるゆえ （♯） $\forall z[z\in F\text{‘}y\rightarrow z\in F\text{“}u]$．一方，$z_0\in F\text{‘}y$ or $z_0=F\text{‘}y$ であるが(⁂)により $z_0\in F\text{‘}y$ でなければならない．すると(♯)から $z_0\in F\text{“}u$. これは(⁂)に反する．ゆえに $\mathrm{Trans}(F\text{“}u)$ でなければならない．$\mathrm{Conn}(F\text{“}u)$ なること．$x\in u$ に対し $\rho(x)$ についての超限帰納法で $F\text{‘}x\cup\{F\text{‘}x\}\subset\mathrm{Suc}$ なることを示そう．帰納法の仮定として $y\in u\wedge\rho(y)<\rho(x)\rightarrow(F\text{‘}y)+1\subset\mathrm{Suc}$ とする．$x=0$ なら $F\text{‘}x=0$ だから問題はない．そうでなければ $y\in u\wedge\{y\}=x\wedge F\text{‘}x=(F\text{‘}y)+1$ なる y がある．$\rho(y)<\rho(x)$ であるから $(F\text{‘}y)+1\subset\mathrm{Suc}$. 明白に $F\text{‘}x\in\mathrm{Suc}$. $\therefore$ $(F\text{‘}x)+1\subset\mathrm{Suc}$. よって $F\text{“}u\subset\mathrm{Suc}\subset\mathrm{OR}$. $\therefore$ $\mathrm{Conn}(F\text{“}u)$. これで $\mathrm{Ord}(F\text{“}u)$ なることがわかった．さて明白に $\alpha\neq0$. もし $\alpha=\beta+1$ なら $\mathrm{Ord}(F\text{“}u)$ だから $\beta=F\text{‘}x$, $x\in u$ なるxがある．uの性質により $\{x\}\in u$ なるゆえ，$\alpha=\beta+1=(F\text{‘}x)+1=F\text{‘}\{x\}\in F\text{“}u=\alpha$. これは不合理．$\therefore$ $\alpha\in\mathrm{OR}-\mathrm{Suc}$. すなわち $\alpha\in\mathrm{Lim}$.] ところで $\beta<\alpha$ なる $\beta\in\mathrm{Lim}$ は存在しない．なぜなら $\beta<\alpha$ なら $\beta=F\text{‘}x$ $(x\in u)$ であるから $\beta=0$ または $\beta=(F\text{‘}y)+1$ の形であるからである．$\therefore$ $\beta\in\mathrm{Suc}$. かくてαは最小の極限順序数である．

3. F: $\mathrm{OR}\rightarrow\mathrm{Suc}$, $F\text{‘}\alpha=\alpha+1$ は全単射で，OR が固有クラスであるから置換公理により Suc は固有クラスである．次に Lim がもしも集合なら，**3.3** 問4により Lim のどの元よりも大きい順序数αがあり **3.5** 問2によりαより大きい極限数 β がある．$\beta\in\mathrm{Lim}\subset\beta$ となり不合理．ゆえに Lim は集合でない．

4. $\alpha \in \mathrm{Lim}$, $f: \omega \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} \alpha$ なる f があるとする．$g`0=f`0$, $g`(n+1)$ は $g`n$ より大きい $f`m$ たちのうち $m$ が最小である $f`m$, と定める．このとき $g`0<g`1<\cdots<g`n<\cdots$ $(n \in \omega)$ であって $\bigcup\{g`n \mid n \in \omega\}=g``\omega=\alpha$ である．

5. r が u 上の全順序であることの証明は読者の演習にゆずる．v を u の任意の空でない部分集合とする．$u_\xi \cap v \neq \phi$ なる最小の ξ をとる．$u_\xi \cap v$ の r_ξ-最小元は v の r-最小元である．よって $\langle u, r\rangle$ は整列集合である．

1) $\nu=2$ のとき **3.10.1** と一致する．

2) $f: u \longrightarrow \alpha \times \beta$ を次のように定義する．$\xi<\beta$ に対し $\langle u_\xi, r_\xi\rangle \overset{g_\xi}{\cong} \langle \alpha, <\rangle$, $u_\xi \cap u_\eta=\phi$ $(\xi \neq \eta)$ とする．$x \in u_\xi$ に対し $f`x=\langle g_\xi`x, \xi\rangle$ とすれば，f は同型写像 $\langle u, r\rangle \cong \langle \alpha \times \beta, <_*\rangle$ を与える．

6. $u=u_\beta=\{f \in \bigtimes_{\xi<\beta} \alpha_\xi \mid f$ の値は有限個を除いて $0\}$ とおく，ただし $\alpha_\xi=\alpha$ for $\xi<\beta$.
1°) $<$ は u 上の全順序である．(a) $f<g \wedge g<h$ とせよ．$\xi_{(f,g)}=\xi_0$, $\xi_{(g,h)}=\xi_1$ とおく．$\xi_0=\xi_1$ なら $\xi_{(f,h)}=\xi_0$ であり明らかに $f`\xi_0<h`\xi_0$. $\xi_0<\xi_1$ なら $\xi_{(f,h)}=\xi_1$ で，$f`\xi_1=g`\xi_1<h`\xi_1$. $\xi_1<\xi_0$ なら $\xi_{(f,h)}=\xi_0$ で $f`\xi_0<g`\xi_0=h`\xi_0$. $\therefore$ $f<h$. (b) 連結性．任意に $f, g \in u$ をとる．$f \neq g$, $\xi_{(f,g)}=\xi_0$ とおく．$f`\xi_0<g`\xi_0$ か $g`\xi_0<f`\xi_0$ かに従って $f<g$ か $g<f$ である．2°) $<$ は u を整列する．任意に $\phi \neq v \subseteq u$ なる v をとる．v が $f``\beta=\{0\}$ なる f を含めば f は v の($<$-)最小元である．そうでなければ，$f \in v$ の値の最後に 0 でないものに対する引数 ξ がある．よって $\xi_0=\min\{\xi \mid \exists f \in v[\forall \eta>\xi(f`\eta=0) \wedge f`\xi \neq 0]\}$ が定まる．$v_1=\{f \in v \mid \forall \eta>\xi_0(f`\eta=0) \wedge f`\xi_0 \neq 0\}$ とおく．(＊) $g \in v-v_1 \wedge f \in v_1 \rightarrow f<g$ である．[$\because$ $\forall \eta>\xi_1(g`\eta=0) \wedge g`\xi_1 \neq 0$ なる ξ_1 は ξ_0 より大きく，$f`\xi \neq g`\xi$ なる最大の ξ は ξ_1 であり，$f`\xi_1=0<g`\xi_1$ であるから $f<g$.] (＊)により v が最小元をもつならそれは v_1 の中にあることになる．$\eta_1=\min\{f`\xi_0 \mid f \in v_1\}$, $w_1=\{f \in v_1 \mid f`\xi_0=\eta_1\}$ とおく．w_1 が 1-元集合ならその要素が v の最小元である．そうでなければ $\xi_0 \neq 0$. よって $\xi_0 \in \mathrm{Suc}$ なら $\xi_1=\xi_0-1$ とおいて $\eta_2=\min\{f`\xi_1 \mid f \in w_1\}$, $w_2=\{f \in w_1 \mid f`\xi_1=\eta_2\}$ とする．$\xi_0 \in \mathrm{Lim}$ なら $\xi_1=\min\{\xi \mid \xi<\xi_0 \wedge \exists f \in w_1 \forall \eta(\xi<\eta<\xi_0 \rightarrow f`\eta=0) \wedge f`\xi \neq 0\}$, $v_2=\{f \in w_1 \mid \forall \eta[\xi_1<\eta<\xi_0 \rightarrow f`\eta=0] \wedge f`\xi_1 \neq 0\}$, $\eta_2=\min\{f`\xi_1 \mid f \in v_2\}$, $w_2=\{f \in v_2 \mid f`\xi_1=\eta_2\}$ とおく．w_2 が 1-元集合ならその要素が v の最小元．そうでなければ$\cdots$．以下，前と同様な議論になる．$\xi_0>\xi_1>\cdots$ であるからこの議論は有限回で終り，v の最小元が得られる．よって v は最小元をもつ．以上で $\langle u, r\rangle$ が整列集合であることが示された．3°) $\langle u, <\rangle \cong \langle \alpha^\beta, <\rangle$ なること．$\beta=0$ のとき．$u=\{\phi\}$, $\alpha^0=1$. $\therefore$ $\langle u, <\rangle \cong \langle 1, <\rangle$. $\beta+1$ のとき．$u_{\beta+1}=\{f \in \bigtimes_{\xi<\beta+1} \alpha_\xi \mid f$ の値は有限個を除いて $0\}$ とおく．$f \in u_{\beta+1}$ なら $f=g \cup \{\langle \beta, \gamma\rangle\}$, $g \in u_\beta$, $\gamma \in \alpha$ なる形に表わせる．特に $f=g \cup \{\langle \beta, 0\rangle\}$ なる形の f たちの集合を u_β' とすると帰納法の仮定を用いて $\langle u_\beta', <|u_\beta'\rangle \cong \langle u_\beta, <\rangle \cong \langle \alpha^\beta, <\rangle$. ところで $h=g \cup \{\langle \beta, \gamma\rangle\}$, $g \in u_\beta$, $0<\gamma<\alpha$ なる形の h は $f=g' \cup \{\langle \beta', 0\rangle\}$ なる形の f よりも大きい．そしてそれら全体は u_β' を $\alpha-1$ 型†に並べた順序型をもつ．u_β' を合せることにより結局 $u_{\beta+1} \cong \alpha^\beta \cdot \alpha=\alpha^{\beta+1}$. $\beta \in \mathrm{Lim}$ の場合．$\forall \gamma>\xi[f`\gamma=0 \wedge f`\xi \neq 0]$ なる最大の ξ を ξ_f $(f \in u_\beta)$ とおく．帰納法の仮定により $\eta<\beta$ に対し $\{f \in u_\beta \mid \xi_f<\eta\} \cong \{f \upharpoonright u_\eta \mid f \in u_\beta \wedge \xi_f<\eta\} \cong \langle \alpha^\eta, <\rangle$ である．整列集合の同型対

† $\alpha \in \mathrm{Lim}$ なら $\alpha-1=\alpha$ である．

応はただ一つであるから各 $\eta<\beta$ に対し h_η: $\{f\in u_\beta|\xi_f<\eta\}\to\alpha^\eta$ なる同型対応 h_η が定まる．$h=\bigcup\{h_\eta|\eta<\beta\}$ は $u_\beta\cong\alpha^\beta$ なる同型対応を与える．

7. 1) $\rho(x)=\beta+1$ なら $\beta\geq\alpha$. そうして $x\in V_{\beta+2}-V_{\beta+1}$, $x\in\mathscr{P}(V_{\beta+1})$. $\therefore$ $x\subseteq V_{\beta+1}$. $x\notin V_{\beta+1}=\mathscr{P}(V_\beta)$ i.e. $x\not\subseteq V_\beta$. よって $y\in x-V_\beta$ なる y がある．$y\in V_{\beta+1}$ なるゆえ $\rho(y)=\beta\geq\alpha$. $\rho(x)\in\mathrm{Lim}$ なら $\alpha<\beta+1<\rho(x)$ なる β あり．$x\notin V_{\beta+1}$ より上のようにして $y\in x-V_\beta$ なる y がある．$\therefore$ $\rho(y)\geq\beta\geq\alpha$. 2) $\rho(x)=\beta+1$ とおくと，$x\subseteq V_{\beta+1}\wedge x\not\subseteq V_\beta$. よって $y\in x\wedge z\in y\to z\in V_\beta$, $\therefore$ $\rho(z)<\beta$. $\therefore$ $\rho(\bigcup x)=\bigcup\{\rho(z)+1|z\in\bigcup x\}<\beta+1=\rho(x)$. $\therefore$ $\rho(\bigcup x)+1\leq\rho(x)$. 逆の不等式を証明するために $\rho(\bigcup x)=\gamma$ とおく．$z\in y\in x\to\rho(z)<\gamma$ であるから，$\rho(y)=\bigcup\{\rho(z)+1|z\in y\}<\gamma+1$. $\therefore$ $\rho(x)=\bigcup\{\rho(y)+1|y\in x\}\leq\gamma+1$. $\therefore$ $\rho(x)=\rho(\bigcup x)+1$. 3) $\rho(x)=\alpha\in\mathrm{Lim}$ とする．$\rho(\bigcup x)=\bigcup\{\rho(z)|z\in y\in x\}\leq\bigcup\{\beta+1|\beta<\alpha\}$ [$\because$ $z\in y\in x$ なら $\rho(z)<\rho(y)\leq\beta+1<\alpha$ なる β あり]$\leq\alpha=\rho(x)$. 逆に 2) の後半により（これは“$\rho(x)\in\mathrm{Suc}$”を使用してない）$\rho(x)\leq\rho(\bigcup x)+1$. $\therefore$ $\rho(\bigcup x)\leq\alpha\leq\rho(\bigcup x)+1$. $\alpha\in\mathrm{Lim}$ だから $\alpha=\rho(\bigcup x)$ でなければならぬ．4) **3.8** 問 2 の 3) により $\rho(\mathscr{P}(x))=\bigcup\{\rho(y)+1|y\subseteq x\}\leq\bigcup\{\rho(x)+1|y\subseteq x\}=\rho(x)+1$. 逆に $\rho(x)+1\not\leq\rho(\mathscr{P}(x))\to\rho(\mathscr{P}(x))\leq\rho(x)\to\mathscr{P}(x)\in V_{\rho(x)+1}\to\rho(x)<\rho(x)$ 不合理．$\therefore$ $\rho(x)+1\leq\rho(\mathscr{P}(x))$. $\therefore$ $\rho(\mathscr{P}(x))=\rho(x)+1$.
5) $u=\{\rho(y)|y\in\mathrm{TC}(x)\}$ とおく．$\mathrm{Conn}(u)$ は明白．$\mathrm{Trans}(u)$ を示そう．$\beta\in\rho(y)\wedge y\in\mathrm{TC}(x)$ なら 7 の 1) により $z_1\in y\wedge\beta\leq\rho(z_1)$ なる z_1 あり．$\beta=\rho(z_1)$ なら $\mathrm{Trans}(\mathrm{TC}(x))$ より $z_1\in\mathrm{TC}(x)$ であるから $\beta\in u$. $\beta<\rho(z_1)$ なら再び $\beta\leq\rho(z_2)\wedge z_2\in z_1$ なる z_2 がある．$\beta=\rho(z_2)$ なら $z_2\in\mathrm{TC}(x)$, $\therefore$ $\beta\in u$. そうでなければ上と同様に進む．この操作は有限回で終るから結局 $\beta=\rho(z_n)\wedge z_n\in z_{n-1}\in\cdots\in z_1\in y\in\mathrm{TC}(x)$ となる．$\therefore$ $\beta\in u$. よって $\mathrm{Trans}(u)$. 以上により $u\in\mathrm{OR}$ なることがわかった．$y\in\mathrm{TC}(x)\to\rho(y)<\rho(x)$ であるから $u\leq\rho(x)$. もし $u<\rho(x)$ なら上と同様にして $u=\rho(y)\wedge y\in\mathrm{TC}(x)$ なる y があり，したがって $u\in u$ となるから不合理．よって $u=\rho(x)$ でなければならない．

8. $\lessdot$ がクラスとして存在することは定義式が $\mathcal{L}$ の論理式として記述できることによる．1) $A=\mathrm{Seg}_{\lessdot}(\langle\gamma,\delta\rangle)$ とおく．$\langle\alpha,\beta\rangle\in A$ なら $\max\{\alpha,\beta\}\leq\max\{\gamma,\delta\}<\max\{\gamma,\delta\}+1$. $\therefore$ $\alpha,\beta\in\max\{\gamma,\delta\}+1$. $\therefore$ $A\subseteq(\max\{\gamma,\delta\}+1)^2$. 右辺は集合であるから A は集合である．

2) $\langle 0,0\rangle$, $\langle 1,0\rangle$, $\langle 0,1\rangle$, $\langle 1,1\rangle$, $\langle 2,0\rangle$, $\langle 2,1\rangle$, $\langle 0,2\rangle$, $\langle 1,2\rangle$, $\langle 2,2\rangle$」, $\cdots$, $\langle\omega,0\rangle$」, $\langle\omega,1\rangle$, $\langle\omega,2\rangle$, $\cdots$; $\langle 0,\omega\rangle$, $\langle 1,\omega\rangle$, $\langle 2,\omega\rangle$, $\cdots$; $\langle\omega,\omega\rangle$」

3) OR^2 は固有クラスであるから **3.4.6** により $\langle\mathrm{OR}^2,\lessdot\rangle$ が整列クラスであることを示せばよい．既に任意の $\lessdot$-始切片が集合であることを知っているから，OR^2 の任意の空でない部分集合 u が最小元をもつことをいえばよい．$\min\{\max\{\alpha,\beta\}|\langle\alpha,\beta\rangle\in u\}=\gamma$ とおく．これに対し $\delta=\min\{\alpha|\alpha\leq\gamma\wedge\langle\alpha,\gamma\rangle\in u\vee\langle\gamma,\alpha\rangle\in u\}$ とすれば，$\langle\gamma,\delta\rangle$ は u の最小元である．なぜなら $\langle\gamma,\delta\rangle$ と異なる任意の $\langle\xi,\eta\rangle\in u$ をとると，γ の選び方から $\max\{\gamma,\delta\}=\gamma\leq\max\{\xi,\eta\}$ である．$\gamma<\max\{\xi,\eta\}$ なら $\langle\gamma,\delta\rangle\lessdot\langle\xi,\eta\rangle$. $\gamma=\max\{\xi,\eta\}$ なら $\langle\gamma,\delta\rangle\underline{\lessdot}\langle\xi,\eta\rangle$. $\xi\leq\gamma=\eta$ のとき $\delta\leq\gamma$ であるから $\langle\gamma,\delta\rangle\underline{\lessdot}\langle\xi,\gamma\rangle=\langle\xi,\eta\rangle$. よって $\langle\gamma,\delta\rangle$ は u の最小元．

なお $\langle\mathrm{OR}^2,\lessdot\rangle\cong\langle\mathrm{OR},<\rangle$ なる一意的に定まる同型対応を P で表わすと，P は次の性質をもつ：

(1) $\langle \alpha, \beta \rangle \lessdot \langle \gamma, \delta \rangle \to P`\langle \alpha, \beta \rangle < P`\langle \gamma, \delta \rangle$

(2) $P`\langle \alpha, \beta \rangle \geq \max\{\alpha, \beta\}$.

(1)は当然. (2)は $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$ とおくとき, $\langle \alpha, \beta \rangle \gtrdot \langle \gamma, 0 \rangle$ であるから $P`\langle \alpha, \beta \rangle \geq P`\langle \gamma, 0 \rangle$. $P' : \mathrm{OR} \to \mathrm{OR}$, $P'`\alpha = P`\langle \alpha, 0 \rangle$ なる P' は狭義単調増大である: $\alpha < \beta \to P'`\alpha < P'`\beta$. よって $\forall \delta[\delta \leq P'`\delta = P`\langle \delta, 0 \rangle]$. 特に $\gamma \leq P`\langle \gamma, 0 \rangle$. ゆえに $P`\langle \alpha, \beta \rangle \geq \gamma = \max\{\alpha, \beta\}$.

9. 2つの全順序構造 $\mathcal{A} = \langle A, <_A \rangle$, $\mathcal{B} = \langle B, <_B \rangle$ が共に可算で稠密かつ最初の元と最後の元をもたないとする. $A = \{a_n | n < \omega\}$, $B = \{b_n | n < \omega\}$ とおく. A の要素たちの有限列 $\langle a_0', \cdots, a_k' \rangle$ が B の要素たちの有限列 $\langle b_0', \cdots, b_k' \rangle$ と**相似**であるとは, それらが同じ方法で順序づけられていること, すなわち

$$a_i' <_A a_j' \leftrightarrow b_i' <_B b_j' \qquad (i, j = 0, 1, 2, \cdots, k)$$

が成り立つことである. $<_A$, $<_B$ は共に稠密で, 最初の元も最後の元ももたないので, 次の(*)が成り立つ:

(*) $\langle a_0', \cdots, a_k' \rangle$ が $\langle b_0', \cdots, b_k' \rangle$ と相似とする. そのとき任意の $a_{k+1}' \in A$ に対し $\langle a_0', \cdots, a_k', a_{k+1}' \rangle$ が $\langle b_0', \cdots, b_k', b_{k+1}' \rangle$ と相似となるような $b_{k+1}' \in B$ が存在し, 逆に任意の $b_{k+1}' \in B$ に対し $\langle a_0', \cdots, a_{k+1}' \rangle$ が $\langle b_0', \cdots, b_{k+1}' \rangle$ と相似となる $a_{k+1}' \in A$ が存在する.

そこでまず $a_0 \in A$, $b_0 \in A$ をとる. 明らかに $\langle a_0 \rangle$ は任意の $c_0 \in B$ に対し $\langle c_0 \rangle$ と相似である. (*)により $\langle a_0, d_0 \rangle$ が $\langle c_0, b_0 \rangle$ と相似であるような $d_0 \in A$ がある. 再び(*)により $\langle a_0, d_0, a_1 \rangle$ が $\langle c_0, b_1, c_1 \rangle$ と相似であるような $c_1 \in B$ がある. 以下, 帰納的に進んで $\langle a_0, d_0, a_1, d_1, \cdots, a_k, d_k \rangle$ が $\langle c_0, b_0, c_1, b_1, \cdots, c_k, b_k \rangle$ と相似であるような $c_k \in B$, $d_k \in A$ が得られる. $f : a_k \longmapsto c_k$, $d_k \longmapsto b_k$ なる f は $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の間の同型対応を与える. [このような方法を**往復法**(back and forth method)という.

10. 1) $\forall z[z \in \mathrm{TC}(x) \to P(z)]$, $y \in x$ とする. 任意の $z \in \mathrm{TC}(y)$ をとる. したがって $z \in \mathrm{TC}(x)$. $\therefore$ $P(z)$. これは y が遺伝的に P であることを示す. 2) $HF = \{x | \forall y \in \mathrm{TC}(x)[\mathrm{Fin}(y)]\}$ とおく. 各 $V_n \in HF$ である. [$V_0 = 0 \in HF$. $V_n \in HF$ と仮定せよ. 任意の $y \in \mathrm{TC}(V_{n+1}) = V_{n+1}$ をとる. $y \subset V_n \in \mathrm{Fin}$. $\therefore$ $y \in \mathrm{Fin}$. $\therefore$ $V_{n+1} \in HF$.] よって $y \in V_\omega \to \exists n[y \in V_n] \to y \in HF$. $\therefore$ $V_\omega \subseteq HF$. 逆に $x \in HF$ なら $\forall y \in \mathrm{TC}[\mathrm{Fin}(y)]$. $\mathrm{Trans}(\mathrm{TC}(x))$ なるゆえ 7 の 5)により $\rho(\mathrm{TC}(x)) = \{\rho(y) | y \in \mathrm{TC}(x)\} \leq \omega$. $\therefore$ $\mathrm{TC}(x) \subseteq V_\omega$. $\therefore$ $x \subseteq V_\omega$. $\mathrm{Fin}(x)$ だから $x \subseteq V_n$ なる n がある. よって $x \in V_{n+1} \subset V_\omega$. $\therefore$ $HF \subseteq V_\omega$.

第 4 章

4.1 問 1. **4.1.7** の 1), 2)により $|u| = |\kappa| = \kappa$.

問 2. $\mathrm{Card} - \bigcup u \neq \phi$ だからこれは順序数としての最小元 ν をもつ. ν は基数で所要の条件をみたす.

問 3. 1) $\alpha \leq \beta$ なら $\alpha \subseteq \beta$. よって $|\alpha| \leq |\beta|$ (**4.1.7**, 4)). 2) $|\alpha| < |\beta|$ とする. もし $\alpha \nless \beta$ なら $\beta \leq \alpha$ だから 1)により $|\beta| \leq |\alpha|$. 不合理.

4.2 問 1. $x \sim n$, $y \sim m$ $(n, m \in \omega)$ とせよ. 1) $z \subseteq x$ なら $|z| \leq n$. $|z| = n$ なら $z \in \mathrm{Fin}$. $|z| < n$ なら順序数として $|z|$ は n のある始切片に同型. それが $k \in n$ による始切片ならば $|z| = k$. $\therefore$ $z \in \mathrm{Fin}$. 2) $x \cap y = \phi$ なら, $x \cup y$ は順序数和 $n + m$ ($\in$

ω) と 1 対 1 に対応する．よって $x\cup y\in \mathrm{Fin}$. $x\cap y\neq\phi$ なら $x\cap y\subseteq x$ であるから 1) より $x\cap y\in\mathrm{Fin}$. よって $x\cap y\sim k$ ($\in\omega$) とする．$x\cup y$ は $(n+m)-k\in\omega$ と 1 対 1 に対応する．(マイナスは集合差ではなく，自然数の引き算，すなわち $n+m$ から k と同型な‘終切片’を集合として引いたもの．それは始切片であるからある自然数に等しい．) ∴ $x\cup y\in\mathrm{Fin}$.

問 2. $\mathrm{Sng}=\{\{x\}\mid x\in V\}$ を考える．$F: x\longmapsto\{x\}$ は V と Sng との間の 1 対 1 対応を与えるから Sng は固有クラスである．$\mathrm{Sng}\subset\mathrm{Fin}$ であるから Fin も固有クラスである．(**2.8** 問 3.)

問 3. 各 $x\in V-\omega$ に対し $\omega\cup\{x\}$ を対応させる対応は固有クラス $V-\omega$ から Infin の中への単射である．よって Infin は固有クラス．

問 4. $\aleph_\alpha<\beta<\aleph_{\alpha+1}$ とすると $|\beta|$ の定義から $\aleph_\alpha\leq|\beta|\leq\beta<\aleph_{\alpha+1}$. $\aleph_\alpha$ と $\aleph_{\alpha+1}$ の間には基数がないので $|\beta|=\aleph_\alpha$ でなければならない．

4.3 問 1. **4.3.8** の証明により $|I|\leq|\mathcal{P}(\omega)|$ が出る．そこで各 $f\subseteq\omega$ に対しそれを特性関数とみて $f_n=f‘n$ とおくと

$$f\longmapsto 0.\ f_0 1 f_1 1 f_2 1\cdots$$

なる対応は $\mathcal{P}(\omega)$ から $I\cup\{1\}$ への単射である．$I\sim I\cup\{1\}$ なるゆえ $|\mathcal{P}(\omega)|\leq|I|$. カントル・ベルンシュタインの定理により $\mathcal{P}(\omega)\sim I$.

問 2. $u=\mathrm{Fin}\cap\mathcal{P}(\omega)$ とおけば $\mathcal{P}(\omega)=[\omega]^\omega\cup u$. u は可算集合である．よって $[\omega]^\omega\in\mathrm{Infin}$. ゆえに v と可算集合 w とを適当にとって $[\omega]^\omega=v\cup w$, $v\cap w=\phi$, $[\omega]^\omega\sim v$ ならしめうる(AC). $[\omega]^\omega\longrightarrow v$, $u\longrightarrow w$ なる全単射は $\mathcal{P}(\omega)\sim[\omega]^\omega$ を与える．

問 3. $\mathcal{P}(\omega)=\{f\mid f: \omega\longrightarrow 2\}$ と考えれば $|{}^\omega\omega|\geq|\mathcal{P}(\omega)|$. 逆に：$\mathcal{P}(\omega)\sim I$ であった．一方，${}^\omega\omega$ は I の無理数全体と考えられる．∴ $|{}^\omega\omega|\leq|\mathcal{P}(\omega)|$.

4.4 問 1. (i), (ii)は省略．(iii) $\lambda=|u|$, $\nu=|v|$, $u\cap v=\phi$ とする．$\kappa\times(u\cup v)=(\kappa\times u)\cup(\kappa\times v)$ であるから $\kappa\cdot(\lambda+\nu)=\kappa\cdot\lambda+\kappa\cdot\nu$. (v) 同様．

問 2. (iii) 集合 $\kappa\times\nu$ から $\lambda\times\nu$ への単射を容易につくることができる．(v)も同様．

問 3. ${}^n\kappa\sim\overbrace{\kappa\times\cdots\times\kappa}^{n\text{個}}$ であることが容易に示される．

問 4. $\kappa\geq\aleph_0$ とする．$|u|=\kappa$, $a\notin u$ とすれば，$|u\cup\{a\}|=\kappa+1$. u は無限集合であるから u は可算部分集合 $v=\{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$ を含む(AC). $f: u\cup\{a\}\longrightarrow\kappa$ を次のように定義する．$x\in u-v$ に対し $f‘x=x$. $f‘b_i=b_{i+1}$, $f‘a=b_0$. f は全射である．∴ $\kappa+1=\kappa$. 同様にして $n\in\omega$ について $\kappa+n=\kappa$ であることが示される．

問 5. $\kappa_0\times\bigtimes_{i\in\omega}\kappa_{i+1}$ と $\bigtimes_{i\in\omega}\kappa_i$ の間の 1 対 1 対応をつくればよい．$\alpha\in\kappa_0$, $f\in\bigtimes_{i\in\omega}\kappa_{i+1}$ なる対 $\langle\alpha, f\rangle$ に対し $g‘0=\alpha$, $g‘(i+1)=f‘i$ なる $g\in\bigtimes_{i\in\omega}\kappa_i$ を対応させる対応は求めるものである．

問 6. もし $\kappa=\lambda+\nu$, λ, $\nu<\kappa$ ならば，例えば $\lambda\geq\nu$ とすると，λ は無限基数．よって **4.4.7** により $(\kappa=)\lambda+\nu=\lambda$. これは仮定に反す．

4.5 問 1. $cf(cf(\alpha))\leq cf(\alpha)$ であるから，等号を証明するためには $cf(cf(\alpha))<cf(\alpha)$ と仮定して矛盾を導けばよい．$\beta=cf(\alpha)$ とおいて $cf(\beta)<\beta$ と仮定せよ．$\langle cf(\beta), <\rangle\overset{g}{\cong}\langle v, <\rangle$, $v\subseteq\beta$ なる β と共終な v をとる．$\beta=cf(\alpha)$ より $\langle\beta, <\rangle\overset{h}{\cong}\langle w, <\rangle$, $w\subseteq\alpha$ なる α と共終な w がある．$h\circ g: cf(\beta)\longrightarrow w$ は同型対応である．よって $\beta=$

$cf(\alpha)\leq cf(\beta)$ となり不合理.

問 2. もし $cf(\aleph_{\alpha+1})=\kappa$ が $\aleph_{\alpha+1}$ より小さいなら, $\kappa\leq\aleph_\alpha$. 各 $\beta<\kappa$ に対し $\xi_\beta<\aleph_{\alpha+1}$ が存在して $\bigcup\{\xi_\beta\mid\beta<\kappa\}=\aleph_{\alpha+1}$. しかし $\aleph_{\alpha+1}=|\bigcup_{\beta<\kappa}\xi_\beta|\leq\sum_{\alpha<\kappa}|\xi_\beta|\leq\kappa\cdot\aleph_\alpha=\aleph_\alpha$. 不合理. $\therefore$ $cf(\aleph_{\alpha+1})=\aleph_{\alpha+1}$.

問 3. $\alpha\in\mathrm{Lim}$ とする. $\aleph_\alpha$ と共終な型 κ の部分集合 ($\subseteq\aleph_\alpha$) があれば, それを用いて α と共終な型 κ の部分集合 ($\subseteq\alpha$) をつくることができる. 逆もいえるから $cf(\aleph_\alpha)=cf(\alpha)$.

問 4. 共終性は始切片には関係せず, 終切片のみによって定まるから, $cf(\alpha+\beta)=cf(\beta)$ である.

4.6 問 1, 問 2, 問 3: 単射の存在として論ずるから従来の証明が有効である.

問 4. $\overline{\overline{u}}=\mathfrak{a}$, $\overline{\overline{v}}=\mathfrak{b}$ とし $\mathfrak{b}<\mathfrak{a}$ とする. よって v から u の中への単射 f がある. f^{-1} は u の整列によって v を整列する.

演習問題 IV

1) $2^\lambda\leq\kappa^\lambda\leq(2^\kappa)^\lambda\leq2^{\kappa\cdot\lambda}=2^\lambda$. 2) $\lambda^\kappa\leq\lambda^\lambda=2^\lambda$. 3) $f:\kappa\longrightarrow\lambda$ とすると $f\subseteq\kappa\times\lambda$, $|f|=\kappa$. よって $\lambda^\kappa\leq|[\kappa\times\lambda]^\kappa|=|[\lambda]^\kappa|$ ($\because$ $|\kappa\times\lambda|=\lambda$). 逆に x, $y\subseteq\lambda$, $|x|=|y|=\kappa$, $x\neq y$ に対し $f:\kappa\xrightarrow[\text{onto}]{}x$, $g:\kappa\xrightarrow[\text{onto}]{}y$ とすれば, $f\neq g$. よって $h:[\lambda]^\kappa\rightarrow\lambda^\kappa$ を次のように定義する: $x\subseteq\lambda$, $|x|=\kappa$ なる x に対し $h`x=f$, ここに f は $f:\kappa\xrightarrow[\text{onto}]{}x$ なる一つの f である(AC により選出する). h は 1-1, したがって $|[\lambda]^\kappa|\leq\lambda^\kappa$. 4)は: 3)において $\kappa=\lambda$ ととれば $\kappa^\kappa=|[\kappa]^\kappa|$ であり, 1)により $\kappa^\kappa=2^\kappa$ であるから $|[\kappa]^\kappa|=2^\kappa$.

2. $u=\{f\mid f:\kappa\xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}}\kappa\}$ とおく. いま, 一般に $[v]_0^\kappa=\{x\subseteq v\mid|x|=\kappa\wedge|v-x|\geq\aleph_0\}$ とおく. このとき (*) $\kappa\leq\lambda\rightarrow\lambda^\kappa=|[\lambda]_0^\kappa|$ が成り立つ. (*)の証明は後回しにする. これより $2^\kappa=\kappa^\kappa=|[\kappa]_0^\kappa|$. また明らかに $|u|\leq\kappa^\kappa$. よって $|[\kappa]_0^\kappa|\leq|u|$ がいえれば $|u|=2^\kappa$ が示されたことになる. そこで $x\in[\kappa]_0^\kappa$ をとる. $\kappa-x=\{a_0,a_1,\cdots,a_\alpha,\cdots\}_{\alpha<|\kappa-x|}$ とする. $h_x:\kappa\xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}}\kappa$ を次のように定義する. $b\in x$ なら $h_x`b=b$. $\alpha$ が偶順序数なら $h_x`a_\alpha=a_{\alpha+1}$, α が奇順序数なら $h_x`a_\alpha=a_{\alpha-1}$ とする. このとき $x$, $y\in[\kappa]_0^\kappa$, $x\neq y\rightarrow h_x\neq h_y$. [$\because$ 例えば $b\in x-y$ なら $h_x`b=b$, $h_y`b\neq b$. $\therefore$ $h_x\neq h_y$] よって $[\kappa]_0^\kappa\ni x\mapsto h_x\in u$ は単射である. よって $|[\kappa]_0^\kappa|\leq|u|$. 以下(*)の証明. $f:\kappa\longrightarrow\lambda$ とすると $f\subseteq\kappa\times\lambda$, $|f|=\kappa$. しかも f は関数だから $\kappa\times\lambda-f$ は無限集合である. よって $\lambda^\kappa\leq|[\kappa\times\lambda]_0^\kappa|=|[\lambda]_0^\kappa|$. 逆に $|[\lambda]_0^\kappa|\leq|[\lambda]^\kappa|=\lambda^\kappa$.

3. 1) α についての帰納法. $\beth_0=\aleph_0$, $\beth_{\alpha+1}=2^{\beth_\alpha}\geq2^{\aleph_\alpha}\geq\aleph_{\alpha+1}$. $\alpha\in\mathrm{Lim}$ に対し $\beth_\alpha=\bigcup\{\beth_\beta\mid\beta<\alpha\}\geq\bigcup\{\aleph_\beta\mid\beta<\alpha\}=\aleph_\alpha$. 2) 同じく α についての帰納法. $\beth_0=\aleph_0=|V_\omega|$, $\beth_{\alpha+1}=2^{\beth_\alpha}=|\mathscr{P}(V_{\omega+\alpha})|=|V_{\omega+\alpha+1}|$. $\alpha\in\mathrm{Lim}$ のとき, $\beth_\alpha=\bigcup\{\beth_\beta\mid\beta<\alpha\}=|\bigcup_{\beta<\alpha}V_{\omega+\beta}|=|V_{\omega+\alpha}|$. 3) $\alpha\leq\beta$ なら $\beth_\alpha\leq\beth_\beta$. 1 の 1)により $\beth_\alpha^{\beth_\beta}=2^{\beth_\beta}=\beth_{\beta+1}$.

4) $\alpha+1>\beta$ なら $\beth_{\alpha+1}^{\beth_\beta}=(2^{\beth_\alpha})^{\beth_\beta}=2^{\beth_\alpha\cdot\beth_\beta}=2^{\beth_\alpha}$ ($\because$ $\alpha\geq\beta$) $=\beth_{\alpha+1}$. 5) $\kappa\in\mathrm{Inac}$ とする. $\beta<\kappa\rightarrow\beth_\beta<\kappa$ である. [$\because$ β についての帰納法. $\beth_0=\aleph_0<\kappa$. $\beth_{\beta+1}=2^{\beth_\beta}<\kappa$. $\beta\in\mathrm{Lim}$ に対し $\beth_\beta=\bigcup\{\beth_\gamma\mid\gamma<\beta\}\leq\kappa$. もし $\beth_\beta=\kappa$ なら $cf(\kappa)=\beta<\kappa$. これは κ が正則であることに反す. $\therefore$ $\beth_\beta<\kappa$.] よって $\beth_\kappa=\bigcup\{\beth_\beta\mid\beta<\kappa\}\leq\kappa$. しかし一般に $\beth_\alpha\geq\alpha$ であるから $\beth_\kappa=\kappa$. 6) ($\rightarrow$) は 5)から直ちにわかる. ($\leftarrow$) κ: 正則$\wedge\,\beth_\kappa=\kappa$ とする. $\lambda<\kappa$ のとき $2^\lambda\geq\kappa$ となることがあれば, $2^\lambda\geq\kappa=\beth_\kappa=\bigcup\{\beth_\beta\mid\beta<\kappa\}>\beth_{\lambda+1}=$

$2^{\beth_\lambda}\geq 2^\lambda$ となり不合理. ∴ $2^\lambda<\kappa$. よって $\kappa\in$ Inac.

4. $\kappa=\aleph_\alpha$, $\lambda=\aleph_\beta$ とおく. $cf(\kappa)>\lambda$ すなわち $cf(\aleph_\alpha)>\aleph_\beta$ のとき. $\alpha=\gamma+1$ なら $cf(\aleph_\alpha)=\aleph_\alpha$. よって $\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta}=\aleph_{\gamma+1}{}^{\aleph_\beta}=(2^{\aleph_\gamma})^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\gamma\cdot\aleph_\beta}=2^{\aleph_\gamma}$ (∵ $\beta\leq\gamma$) $=\aleph_{\gamma+1}=\aleph_\alpha$. $\alpha\in$ Lim のとき. $\aleph_\alpha\leq\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta}=\sum_{\gamma<\alpha}\aleph_\gamma{}^{\aleph_\beta}\leq\sum_{\gamma<\alpha}(2^{\aleph_\gamma})^{\aleph_\beta}=\sum_{\gamma<\alpha}2^{\aleph_\gamma\cdot\aleph_\beta}=\sum_{\gamma<\alpha}2^{\aleph_\delta}$ ($\delta=\max(\gamma,\beta)$) $=\sum_{\gamma<\alpha}\aleph_{\delta+1}\leq\sum_{\gamma<\alpha}\aleph_\alpha=\aleph_\alpha|\alpha|=\aleph_\alpha$ ∴ $\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha$. 次に $cf(\kappa)\leq\lambda\leq\kappa$ すなわち $cf(\aleph_\alpha)\leq\aleph_\beta\leq\aleph_\alpha$ のとき. $u\subseteq\aleph_\alpha$ が $\aleph_\alpha$ と共終で型 $cf(\aleph_\alpha)$ をもつ集合とする. そのとき $|u|=|cf(\aleph_\alpha)|=cf(\aleph_\alpha)\leq\aleph_\beta$, $\aleph_\alpha=|\bigcup_{\gamma\in u}\gamma|\leq\sum_{\gamma\in u}|\gamma|<\prod_{\gamma\in u}\aleph_\alpha=\aleph_\alpha{}^{|u|}\leq\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta}\leq(2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta}=2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$. すなわち $\aleph_\alpha<\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta}\leq\aleph_{\alpha+1}$. ∴ $\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta}=\aleph_{\alpha+1}$ ($=\kappa^+$). おしまいに $\kappa\leq\lambda$ すなわち $\aleph_\alpha\leq\aleph_\beta$ のとき. $\lambda^+=\aleph_{\beta+1}=2^{\aleph_\beta}\leq\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta}\leq(2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\alpha\cdot\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}=\aleph_{\beta+1}$, ∴ $\aleph_\alpha{}^{\aleph_\beta}=\aleph_{\beta+1}$.

5. $\aleph_\alpha=\beta+1$ なら $\aleph_\alpha\sim\beta$ となるから最小性により $\aleph_\alpha=\beta$. 不合理. よって $\aleph^\alpha\in$ Lim.

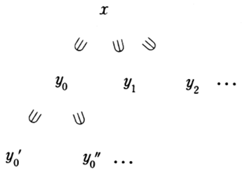
6. III の 8 の解答における同型対応 P を考える. P はもちろん 1-1 順序保存であるから, $P“(\aleph_\alpha\times\aleph_\alpha)=\aleph_\alpha$ なることがいえれば十分. もし $P“(\aleph_\alpha\times\aleph_\alpha)\neq\aleph_\alpha$ なら, III 8 の解答における $P‘\langle\gamma,\delta\rangle\geq\max\{\gamma,\delta\}$ を用いて, $P“(\aleph_\alpha\times\aleph_\alpha)>\aleph_\alpha$ でなければならない. よって $P‘\langle\gamma,\delta\rangle>\xi\geq\aleph_\alpha$, $\gamma,\delta<\aleph_\alpha$ なる γ,δ,ξ が存在する. しかし $\max\{\gamma,\delta\}<\aleph_\alpha$ だから $P‘\langle\gamma,\delta\rangle<P‘\langle\aleph_\alpha,0\rangle=\aleph_\alpha$ となり不合理.

7. (i) $u_i\cap u_j=\phi$ $(i\neq j)$ なる $\{u_i|i\in I\}$ をとる. $(\lambda\times u_i)\cap(\lambda\times u_j)=\phi$ $(i\neq j)$ であって $\lambda\times\bigcup_{i\in I}u_i=\bigcup_{i\in I}(\lambda\times u_i)$ であるから $\lambda\cdot\sum\kappa_i=\sum\kappa\cdot\kappa_i$. (ii) $u_i\cap u_j=\phi$ $(i\neq j)$, $|u_i|=\nu$ なる $\{u_i|i\in I\}$ をとり $f_i:\nu\xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1}u_i$ とする. $f:\nu\times I\longrightarrow\bigcup_{i\in I}u_i$ を $f‘\langle\alpha,i\rangle=f_i‘\alpha$ によって定義すると, f は全単射である. よって $\nu\times|I|=\sum_{i\in I}\kappa_i$.
(iii) $|v_i|=|u_i|$, $v_i\cap v_j=\phi$ $(i\neq j)$ なる $\{v_i|i\in I\}$ をとる. $u_i\overset{f_i}{\sim}v_i$ とする. $f:\bigcup u_i\longrightarrow\bigcup v_i$ を $x\in u_i$ に対し $f‘x=f_i‘x$ によって定義すると f は 1-1. よって $|\bigcup u_i|=\sum|u_i|$. (iv) $\forall i\in I(\kappa_i=\nu)$ とする. $\prod_{i\in I}\kappa_i=|\bigtimes_{i\in I}\kappa_i|$, $\nu^I=|{}^\lambda\nu|$ (ここに $\lambda=|I|$) という定義から直ちに従う. (v) $u_i\wedge u_j=\phi$ $(i\neq j)$, $|u_i|=\kappa_i$ なる $\{u_i|i\in I\}$ をとる. $f:\bigcup_{i\in I}u_i\longrightarrow\nu$ に対し $g‘i=f\restriction u_i$ なる g を対応させる対応 $h:f\longmapsto g$ は ${}^u\nu$ $(u=\bigcup u_i)$ から $\bigtimes_{i\in I}{}^{u_i}\nu$ への全単射である. (vi) 各 $f\in\bigtimes_{i\in I}{}^\lambda\kappa_i$ に対し $(g‘\alpha)‘i=(f‘i)‘\alpha$ $(i\in I,\alpha\in\lambda)$ なる $g\in{}^\lambda(\bigtimes_{i\in I}\kappa_i)$ を対応させる対応 $h:f\longmapsto g$ は全単射である.

8. $cf(\aleph_\alpha)=\nu<\aleph_\alpha$ とする. $f:\nu\longrightarrow\aleph_\alpha$ なる**正規な共終関数** f が存在する. すなわち, f は単調増大で**連続**[任意の $\beta\in$ Lim に対し $\beta<\nu$ ならば $\lim_{\xi<\nu}f‘\xi=f‘\beta$ なること] かつ $\forall\xi<\aleph_\alpha\exists\eta<\nu[f‘\eta>\xi]$. $x\subseteq\aleph_\alpha$, $\eta<\nu$ に対し $x_\eta=x\cap f‘\eta$ におく. $g:\mathcal{P}(\aleph_\alpha)\longrightarrow\prod_{\eta<\nu}\mathcal{P}(f‘\eta)g‘x=\{x_\eta|\eta<\nu\}$ $(x\subseteq\aleph_\alpha)$ なる関数 g は単射である. かくて $2^{\aleph_\alpha}\leq\prod_{\eta<\nu}2^{|f‘\eta|}\overset{*}{\leq}\prod_{\eta<\nu}2^{\aleph_\gamma}=2^{\aleph_\gamma\cdot\nu}\overset{\#}{=}2^{\aleph_\gamma}$. したがって $2^{\aleph_\gamma}=2^{\aleph_\alpha}$ である. * の証明: $|f‘\eta|<\aleph_\beta<\aleph_\alpha$ なる $\beta<\alpha$ がある. $\gamma\leq\beta$ なら仮定により $2^{|f‘\eta|}\leq2^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\gamma}$. $\beta<\gamma$ ならもちろん $2^{|f‘\eta|}\leq2^{\aleph_\beta}\leq2^{\aleph_\gamma}$. また, # の証明: $\nu\leq\aleph_\gamma$ ならよろしい. そこで $\aleph_\gamma<\nu$ とする. そのとき $\aleph_\gamma<\nu\leq\aleph_\beta<\aleph_\alpha$ なる β がある. ∴ $2^{\aleph_\gamma}=2^{\aleph_\beta}$, したがって $2^{\aleph_\gamma}=2^\nu$. よって

$2^{\aleph_\gamma\cdot\nu}=(2^\nu)^{\aleph_\gamma}=(2^{\aleph_\gamma})^{\aleph_\gamma}=2^{\aleph_\gamma}$.

9. 1) $H_\kappa\subseteq HE_\kappa$ は明白．κ が正則 → $HE_\kappa\subseteq H_\kappa$ なること：$\kappa=\omega$ のとき．$|x|<\omega \wedge \forall y[y\in \mathrm{TC}(x)\to |y|<\omega]$ とせよ．$\mathrm{TC}(x)$ を $\in$ についての木とみると，どの枝の長さも有限，どの点での分岐も有限であるから，木全体は有限集合である．(D. **ケーニヒの無限性補題**という．対偶が無限長分枝の存在を主張するからこの名がある．**4.4** のケーニヒは J. ケーニヒで別人．) すなわち $|\mathrm{TC}(x)|<\omega$．今度は $\kappa>\omega$ で κ は正則とし $|x|<\kappa\wedge\forall y[y\in\mathrm{TC}(x)\to|y|<\kappa]$ とする．もし $|\mathrm{TC}(x)|=\kappa$ ならある $n>0$ に対し $|\bigcup^n x|=\kappa$．$n=1$ のとき．$\kappa=|\bigcup x|=|\bigcup\{y_\alpha|\alpha<\kappa\}|$ ここに $y_\alpha\in x$, $|y_\alpha|<\kappa$．これは κ が κ 未満個の κ より小さい濃度の集合たちの和であることを意味するから κ の正則性に反す．$n=2$ のとき．$\kappa=|\bigcup^2 x|=|\bigcup\{y_\alpha|\alpha<\kappa\}|$ ここに $y_\alpha\in\bigcup x$．∴ $y_\alpha\in\mathrm{TC}(x)$．∴ $|y_\alpha|<\kappa$．よって上と同様にして不合理となる．以下同様．2) $x\in HE_\kappa\to|x|<\kappa\to x\in V_\kappa$，したがって $HE_\kappa\subseteq V_\kappa$． 3) $|\mathrm{TC}(x)|<\kappa$ なる木が何個あるか考える．それは κ より小さい濃度 ν の集合上での 2 項関係たちの個数を超えない．それは $\nu\times\nu$ の部分集合たちの個数，すなわち 2^ν 個を超えない．よって $|H_\kappa|\le 2^\kappa$ である．またどんな 2^ν $(\nu<\kappa)$ をとってもそれより沢山の H_κ の要素たちがある．



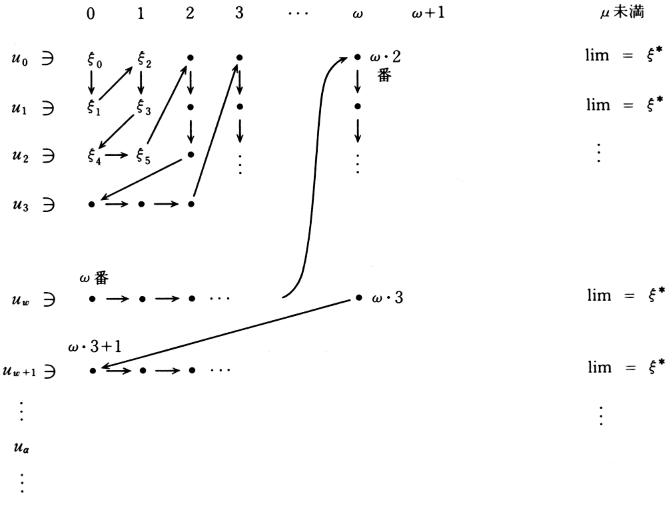
10. 演習問題 III 7 の 5)により $\rho(x)=\{\rho(y)|y\in\mathrm{TC}(x)\}$ であつた．ρ は関数であるから $|\rho(x)|\le|\mathrm{TC}(x)|$．

11. 1) ($\Rightarrow$) $\beta\in u\wedge\beta\cap u\neq\phi$ とする．明らかに $\beta\cap u$ は u で有界．よって $\bigcup(\beta\cap u)\in u$．($\Leftarrow$) $v\subset u$ を u で有界な空でない集合とする．そのとき $v\subseteq\beta\wedge\beta\in u$ なる最小の β がある．仮定により $\bigcup(\beta\cap u)\in u$ であるから $\bigcup v=\bigcup(\beta\cap u)$ が証明できればよい．$\bigcup v\subseteq\bigcup(\beta\cap u)$ は明白．そこで $\gamma\notin\bigcup v$, $\gamma\in\bigcup(\beta\cap u)$ なる γ があるとせよ．γ より大きい v の元 ξ があれば $\gamma\in\bigcup v$ となってしまうので，γ より大きい v の元は存在しない．β の最小性から $\gamma=\beta$ でなければならない．そのとき $\beta\in\beta$ となり不合理．

2) $\phi\neq v\subset u$ を有界とする．よって $v\subseteq\beta$ なる $\beta\in u$ がある．極限数たちの和は極限数であり，$\bigcup v\le\beta<\alpha$ であるから $\bigcup v\in u$． 3) $\kappa>\omega$ とする．$u=\{\beta<\kappa|\beta\in\mathrm{Lim}\}$ とおく．2)によって u は閉である．u が κ で u.b. なること．もし有界なら $u\subseteq\beta\wedge\beta<\kappa$ なる β がある．κ は基数であるから β より大きく κ より小さい極限数がある．よってこれは u に属する．不合理．

4) $\kappa>\omega$ は正則とする．u_α を club in κ $(\alpha<\kappa)$ とし $d=\{\beta|\forall\alpha<\beta[\beta\in u_\alpha]\}=\{\beta|\beta\in\bigcap_{\alpha<\beta}u_\alpha\}$ とおく．d は閉である．なぜなら：$\phi\neq v\subset d$ を有界とする．v は最大元をもたないとしてよい [∵ もし最大元 δ ($\in v$) があれば $\bigcup v=\delta\in v\subset d$]．よって $\bigcup v=\beta$ とおくと $\beta\in\mathrm{Lim}$．$\beta\in d$ を証明したい．そのため $\alpha<\beta$ なる任意の α をとる．任意の $\delta\in v-\alpha\cup\{\alpha\}$ に対し $\alpha<\delta$ なるゆえ d の定義より $\delta\in\bigcap_{\gamma<\delta}u_\gamma\subseteq u_\alpha$． ∴ $v-\alpha\cup$

$\{\alpha\}\subseteq u_\alpha$. $\beta\in\mathrm{Lim}\wedge\alpha<\beta$ なることから $\sup(v-\alpha\cup\{\alpha\})=\sup v=\beta$. u_α は閉, $v-\alpha\cup\{\alpha\}$ は最大元をもたなくて $\subseteq u_\alpha$. ゆえに $\beta=\bigcup(v-\alpha\cup\{\alpha\})\in u_\alpha$. α は任意だから $\beta\in d$. よって d は閉である. d は u. b. in κ である. なぜなら, 任意に $\xi<\kappa$ をとる. d が $\eta\geq\xi$ なる η を含むことを示せばよい. $\delta_0=\xi$, δ_{n+1} は $\bigcap_{\alpha<\delta_n}u_\alpha$ の中の δ_n より大きい最小の順序数とする. $\bigcap_{\alpha<\delta_n}u_\alpha$ は club in κ である[*]. よって δ_{n+1} は存在し確定する. $\eta=\bigcup_{n<\omega}\delta_n$ とおく. κ は正則で $>\omega$ だから $\eta<\kappa$. さらに $\eta\geq\delta_0=\eta$ である. よって $\eta\in d$ なることがいえればよい. 任意に $n\in\omega$ をとる. $m>n$ に対し δ_m の定義によって $\delta_m\in\bigcap_{\alpha<\delta_{m-1}}u_\alpha\subseteq\bigcap_{\alpha<\delta_n}u_\alpha$. したがって $\{\delta_m|n<m<\omega\}\subseteq\bigcap_{\alpha<\delta_n}u_\alpha$. $\bigcap_{\alpha<\delta_n}u_\alpha$ は閉で, $\{\delta_m|n<m<\omega\}$ はその部分集合で最大元をもたないから, $\eta=\bigcup_{n<m<\omega}\delta_m\in\bigcap_{\alpha<\delta_n}u_\alpha$. これは任意の $n\in\omega$ について成立するから $\eta\in\bigcap_{n<\omega}\bigcap_{\alpha<\delta_n}u_\alpha=\bigcap_{\alpha<\eta}u_\alpha$ ($\because$ $\eta=\sup_{n<\omega}\delta_n$). $\therefore$ $\eta\in d$. 以下[*]の証明: 閉なることは明らか. u. b. in κ なること: 演習問題 III の 8 で定義された OR^2 上の整列順序 $\lessdot$ を考える. 以下では番号づけは $\lessdot$ に従うものとする. → は順序数の大小関係 $<$ を表わすとする. $\delta_n=\mu$ とおく.



各行で極限をとると, 作り方から明らかなように等しい極限値となる. それを ξ^* とする. 各 u_α は閉だから $\xi^*\in\bigcap_{\alpha<\mu}u_\alpha$ である. 極限の型は μ であり $\mu<\kappa=cf(\kappa)$ かつ最初の $\xi_0\in u_0$ の選び方は任意でよいからいくらでも大きい ($<\kappa$) かかる ξ^* をつくることができる. よって $\bigcap_{\alpha<\mu}u_\alpha$ は c. u. in κ である.

12. 各 $f\in{}^{\omega}\omega$ に I_1 の実数 $\sum_{n=0}^{\infty}2^{-(f(0)+f(1)+\cdots+f(n)+n+1)}$ を対応させる対応は全単射である.

13. κ を特異基数とする. もし λ 個(ただし $\lambda<cf(\kappa)<\kappa$)しか正則基数 $<\kappa$ が存在しないとすれば, それらを $\mu_0<\mu_1<\cdots<\mu_\alpha<\cdots(<\kappa)$, $\alpha<\lambda$ とし, $\bigcup_{\alpha<\lambda}\mu_\alpha=\nu$ とおくと, $\lambda<cf(\kappa)$ であるから $\nu<\kappa$. 仮定により区間 $[\nu,\kappa)$ は正則基数を含まないはずであるが, ν 自身基数であり $\nu<\nu^+<\kappa$ となる. **4.5** 問2により ν^+ は正則である. 不合理. (**注意**. κ は特異だから後者基数とならないので $\nu^+\neq\kappa$)

14. μ を κ 上の κ-加法的2値測度とする. 1°) κ が正則であることの証: $\lambda<\kappa$ とし, 各 $\alpha<\lambda$ に対し $u_\alpha\subset\kappa$, $|u_\alpha|<\kappa$ なる集合 u_α たちの和 $u=\bigcup\{u_\alpha|\alpha<\lambda\}$ を考える. κ-加法性と1元集合の μ-測度の値が0であることから

$$\mu(u_\alpha)=0 \qquad \text{for all } \alpha<\lambda.$$

よって再び κ-加法性により,

$$\mu(u)\leq\sum_{\alpha<\lambda}\mu(u_\alpha)=0, \qquad \therefore\ \mu(u)=0.$$

$\mu(\kappa)=1$ だから, $u\neq\kappa$. このことは, κ が κ より小さい基数たちの κ 未満個の和に等しくないことを示した. よって $cf(\kappa)=\kappa$. 2°) κ が強極限的であることの証: $\lambda<\kappa$, $2^\lambda\geq\kappa$ と仮定して矛盾を出せばよい. 仮定により $h:\kappa\xrightarrow{1\text{-}1}{}^{\lambda}2$ なる h がある. $\mu':\mathcal{P}({}^{\lambda}2)\longrightarrow2$ を

$$\mu'(x)=\mu(h^{-1}(x)), \qquad x\subseteq\lambda$$

によって定義する. μ' は ${}^{\lambda}2$ 上の κ-加法的2値測度である. $\kappa\subseteq{}^{\lambda}2$ と考えて, 各 $\alpha<\lambda$ に対し

$$u(\alpha,i)=\{f\in\kappa|f`\alpha=i\}, \qquad i=0,1$$

をつくる. $u(\alpha,0)\cap u(\alpha,1)=\phi$, $u(\alpha,0)\cup u(\alpha,1)=\kappa$ であるから, 各 $\alpha<\lambda$ に対し

$$\mu(u(\alpha,i_\alpha))=1, \qquad \mu(u(\alpha,1-i_\alpha))=0$$

なる i_α が定まる. $u=\bigcap_{\alpha<\lambda}u(\alpha,i_\alpha)$ とおくと,

$$\mu(\kappa-u)=\mu(\bigcup_{\alpha<\lambda}u(\alpha,1-i_\alpha))=\sum_{\alpha<\lambda}\mu(u(\alpha,1-i_\alpha))=0$$

であるから, $\mu(u)=1$. しかし明らかに u は1元集合なるゆえ $\mu(u)=0$. 不合理.

第5章

5.2 問 1. 1) $\varphi\in\Sigma_m^{\Omega}$ とし $\varphi(x)\equiv\exists y\psi(x,y)$, $\psi\in\Pi_{m-1}^{\Omega}$ とおく. Ω で $\varphi(x)\leftrightarrow\exists y\forall z[z=z\rightarrow\psi(x,y)]\leftrightarrow\forall z\exists y[z=z\rightarrow\psi(x,y)]$ が成り立つから $\varphi\in\Delta_{m+1}^{\Omega}$, これを出発点として $n>m$ なるすべての n に対し $\varphi\in\Delta_n^{\Omega}$ なることが帰納法で証明される. 今度は $\varphi\in\Pi_m^{\Omega}$ とし $\varphi(x)\equiv\forall y\psi(x,y)$, $\psi\in\Sigma_{m-1}^{\Omega}$ とする. Ω で $\varphi(x)\leftrightarrow\exists z\forall y[z=z\wedge\psi(x,y)]\leftrightarrow\forall y\exists z[z=z\wedge\psi(x,y)]$ が成り立つから $\varphi\in\Delta_{m+1}^{\Omega}$. 2)と3): 合せて m についての帰納法を用いる. $\varphi\in\Sigma_m^{\Omega}$ とし1)の最初のようにおく. $\neg\varphi\leftrightarrow\forall y\neg\psi(x,y)$ であるから帰納法の仮定により $\neg\psi\in\Sigma_{m-1}^{\Omega}$. よって $\varphi\in\Pi_m^{\Omega}$. 他も同様.

問 2. $\varphi\leftrightarrow\forall z\theta(x,z)$, $\theta\in\Sigma_{n-1}^{\mathrm{ZF}}$ とする. このとき (*) $\exists x\in y\forall z\theta(x,z)\leftrightarrow\forall u\exists x\in y\forall z\in u\theta(x,z)$ が成り立つ. ここに u は $\theta(x,z)$ に現われない変数である.

(*)が成り立つことの証明は **5.2.8** で示したものと全く同様である．なぜなら(*)は $\forall x\in y\exists z\neg\theta(x,z)\leftrightarrow\exists u\forall x\in y\exists z\in u\neg\theta(x,z)$ と同値だから．

問 3. $\{x|\varphi(x)\}$ を集合とし，$\varphi(x)\in\Delta_n^{\mathrm{ZF}}$ であるとする．$y=\{x|\varphi(x)\}\leftrightarrow\forall x\in y\,\varphi(x)\wedge\forall x[\varphi(x)\to x\in y]$ である．右辺は Π_n^{ZF}.

問 4. $\varphi(x)\in\Delta_n^{\mathrm{ZF}}$ なら，$y=\{x\in z|\varphi(x)\}\leftrightarrow\forall x\in y[x\in z\wedge\varphi(x)]\wedge\forall x\in z[\varphi(x)\to x\in y]$. 右辺は Δ_n^{ZF} である．

問 5. 1) $x=y+1\leftrightarrow x=y\cup\{y\}\leftrightarrow\forall t\in x[t\in y\cup\{y\}]\wedge[y\in x\wedge\forall t\in y(t\in x)]$.
$\mathrm{Suc}(x)\leftrightarrow\mathrm{Ord}(x)\wedge[x=0\vee\exists y\in x(x=y+1)]$.
$\mathrm{Lim}(x)\leftrightarrow\mathrm{Ord}(x)\wedge x\neq 0\wedge\forall y\in x\neg[x=y+1]$.

2) $x=2\leftrightarrow 0\in x\wedge 1\in x\wedge\forall t\in x[t=0\vee t=1]$. $x=\omega\leftrightarrow\mathrm{Lim}(x)\wedge\forall y\in x\neg\mathrm{Lim}(y)$.

3) $y=\bigcup x\leftrightarrow\forall t\in y\exists z\in x(t\in z)\wedge\forall t[\exists z\in x(t\in z)\to t\in y]$

$\leftrightarrow\forall t\in y\exists z\in x(t\in z)\wedge\forall z\in x\forall t\in z(t\in y)$.

$t\in\bigcup\bigcup x\leftrightarrow\exists z\in x\exists u\in z(t\in u)$

$z\in x\times y\leftrightarrow\exists s\in x\exists t\in y[z=\langle s,t\rangle]$

4) $t\in\mathrm{Dom}(f)\leftrightarrow\exists y(\langle t,y\rangle\in f)$ であり $y\in\bigcup\bigcup f$ であるから

$\leftrightarrow\exists u\in f\exists v\in u\exists y\in v\exists w\in f[w=\langle t,y\rangle]$

$d=\mathrm{Dom}(f)\leftrightarrow\forall t\in d\exists y(\langle t,y\rangle\in f)\wedge\forall t[\exists y\langle t,y\rangle\in f)\to t\in d]$

$\leftrightarrow\forall t\in d\exists u\in f\exists v\in u\exists y\in v(\langle t,y\rangle\in f)\wedge\forall u_1\in f\forall v_1\in u_1\forall t\in v_1\forall u\in f$
$\forall v\in u\forall y\in v[\langle t,y\rangle\in f\to t\in d]$. $\mathrm{Rng}(f)$ についても同様．

$\mathrm{Func}(f)\leftrightarrow\forall t\in f\exists r\in\bigcup\bigcup t\exists s\in\bigcup\bigcup t[t=\langle r,s\rangle]\wedge\forall x\in\bigcup\bigcup f\forall y\in\bigcup\bigcup f$
$\forall y'\in\bigcup\bigcup f[\langle x,y\rangle\in f\wedge\langle x,y'\rangle\in f\to y=y']$

であるから上の手法によって $\mathrm{Func}(f)$ は Δ_0^{ZF} である．

5) $y=f`x\leftrightarrow\forall t\in\bigcup\bigcup f[\langle x,t\rangle\in f\leftrightarrow t=y]\wedge\langle x,y\rangle\in f$

$.\vee.\neg\exists z\in\bigcup\bigcup f\forall t\in\bigcup\bigcup f[\langle x,t\rangle\in f\leftrightarrow t=z]\wedge y=0$

$y=f``x\leftrightarrow\forall t\in y\exists s\in x(\langle s,t\rangle\in f)\wedge\forall t\in\bigcup\bigcup f\exists s\in x(\langle s,t\rangle\in f\to t\in y)$.

$y=f\restriction x\leftrightarrow y=f\cap[x\times\mathrm{Rng}(f)]$.

6) $\mathrm{TC}(x)=\{t|\forall z(x\in z\wedge\mathrm{Trans}(z)\to t\in z)\wedge t\neq x\}$ が成り立つ．よって $t\in\mathrm{TC}(x)$ は Π_1^{ZF} である．しかし $t\in\mathrm{TC}(x)\leftrightarrow\exists n[n\in\omega\wedge t\in\bigcup^n x]$ で $n\in\omega$ は Δ_0^{ZF} であるから，それは $\sum_1^{\mathrm{ZF}}$ でもある．よって $y=\mathrm{TC}(x)$ は Δ_1^{ZF} である．

7) n についての帰納法で $x\in n$, $y=n$ が Δ_0^{ZF} であることを示そう．$n=0$: $x\in 0$, $y=0$ は Δ_0^{ZF}. $y=n+1\leftrightarrow\forall t\in y[t\in n\vee t=n]\wedge\underset{\sim\sim\sim}{0\in x\wedge 1\in x\wedge\cdots\wedge(n-1)\in x\wedge n\in x}$.
[ ] と ～～ とは帰納法の仮定により Δ_0^{ZF}. よって全体は Δ_0^{ZF}.

5.4 問 1. まず $u,v\in V_\alpha$ に対し $f:u\longrightarrow v$ なら，$\alpha\in\mathrm{Lim}$ なるゆえ，$f\in V_\alpha$ であることに注意する．$x\in V_\alpha$ に対しこの注意と $\mathrm{Trans}(V_\alpha)$ とによって

$$(\mathrm{Card}(x))^{V_\alpha}\leftrightarrow(\mathrm{Ord}(x)\wedge\forall\beta<x\neg\exists f[f:\beta\xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}}x])^{V_\alpha}$$
$$\leftrightarrow\mathrm{Ord}(x)\wedge\forall\beta<x\neg\exists f[f:\beta\xrightarrow[\text{onto}]{\text{1-1}}x]\leftrightarrow\mathrm{Card}(x).$$

5.6 問 1. $\alpha\cdot\beta$, α^β に対しそれぞれ次の φ_1, φ_2 を用いて **5.6** 例 1 の証明にならえばよい．$\varphi_1(z,\alpha,\beta,\gamma)\equiv z\subset\mathrm{OR}^2\wedge[(\beta=0\wedge\gamma=0)\vee\exists\delta\in\beta(\beta=\delta+1\wedge\gamma=(z`\delta)+\alpha)\vee\forall\delta\in\beta(\delta+1\in\beta\wedge\gamma=\bigcup z``\beta)]$, $\varphi_2(z,\alpha,\beta,\gamma)\equiv z\subset\mathrm{OR}^2\wedge[(\beta=0\wedge\gamma=1)\vee\exists\delta\in\beta(\beta=\delta+1\wedge\gamma=(z`\delta)\cdot\alpha)\vee\forall\delta\in\beta(\delta+1\in\beta\wedge\gamma=\bigcup z``\beta)]$.

問 2. まず，(3) の証明：与えられた z, x に対し $\alpha=\bigcup\{(z`y)+1|y\in x\}$ は $\varphi(z, x, \alpha)$ をみたす．また $\varphi(z, x, \alpha)\wedge\varphi(z, x, \alpha')$ とすると，任意の $\beta\in\alpha$ に対し $y\in x\wedge\beta\in(z`y)+1$ なる y がある．よって仮定 $\forall y\in x((z`y)+1\subset\alpha')$ により $\beta\in\alpha'$, $\therefore$ $\alpha\subseteq\alpha'$. 対称的に $\alpha'\subseteq\alpha$，したがって $\alpha=\alpha'$. 次に $\rho(x)=\varphi`\langle\rho\restriction x, x\rangle$ の証明：$\in$-帰納法の仮定として $\forall y\in x[\rho(y)=\varphi`\langle\rho\restriction y, y\rangle]$ とする．$\forall y\in x(\rho(y)+1\subset\alpha)\wedge\forall\beta<\alpha\,\exists y\in x(\beta\in\rho(y)+1)$ であるから $\alpha=\{\rho(y)+1|y\in x\}=\rho(x)$.

演習問題 V

1. $y=\{x\in T|\varphi(x)\}\leftrightarrow\forall x\in y[x\in T\wedge\varphi(x)]\wedge\forall x[x\in T\wedge\varphi(x)\to x\in y]$
右辺は Π_n^{ZF}. また第 2 項は $\exists z\forall x\in z[x\in T\wedge\varphi(x)\to x\in y]$ と (ZF で) 同値である (なぜなら $z=\{x\in T|\varphi(x)\}$ なる集合が存在するからである)．よって右辺は Σ_n^{ZF} でもあり，したがって Δ_n^{ZF} となる．

2. 1) “β は α と共終である” $\leftrightarrow\exists f[f:\beta\to\alpha\wedge\alpha=\bigcup\mathrm{Rng}(f)]$ なることから直ちにわかる．

2) “α は正則である” $\leftrightarrow cf(\alpha)=\alpha\leftrightarrow\alpha=\bigcap\{\beta|\beta$ は α と共終である$\}\leftrightarrow\forall t\in\alpha\forall\beta[(\beta$ は α と共終$)\to t\in\beta]\wedge\forall t[\forall\beta[(\beta$ は α と共終$)\to t\in\beta]\to t\in\alpha]$. これは Π_1^{ZF} である．

3. $y=\mathscr{P}(x)\leftrightarrow\forall t\in y\forall z\in t[z\in x]\wedge\forall t[\forall z\in t(z\in x)\to t\in y]$. これは Π_1^{ZF} である．“$\mathscr{P}(x)$ は整列可能である” $\leftrightarrow\exists t[t=\mathscr{P}(x)\wedge\exists f(\mathrm{Func}_1(f)\wedge\mathrm{Dom}(f)=t\wedge\mathrm{Ord}(\mathrm{Rng}(f))]\leftrightarrow\forall t[t=\mathscr{P}(x)\to\exists f(\mathrm{Func}_1(f)\wedge\mathrm{Dom}(f)=t\wedge\mathrm{Ord}(\mathrm{Rng}(f))]$ よってこれは Δ_2^{ZF}.

4. $\alpha\in\mathrm{Lim}$ とする．$x\in V_\alpha\wedge t\subseteq x\to t\in V_\alpha$ なることに注意すると，$\mathrm{Trans}(V_\alpha)$ であるから，$x, y\in V_\alpha$ に対し $(y=\mathscr{P}(x))^{V_\alpha}\leftrightarrow\forall t\in y\cap V_\alpha[t\subseteq x]^{V_\alpha}\wedge\forall t\in V_\alpha[t\subseteq x\to t\in y]^{V_\alpha}\leftrightarrow\forall t\in y[t\subseteq y]\wedge\forall t[t\subseteq x\to t\in y]\leftrightarrow y=\mathscr{P}(x)$.

5. 1) $H_{\aleph_1}$ のみならず一般の正則基数 $\kappa>\omega$ に対し 1) が成立するので，以下それを証明しよう．$y\in x\in H_\kappa$ なら $\mathrm{TC}(y)\subset\mathrm{TC}(x)$ であり $|\mathrm{TC}(x)|<\kappa$ であるから $|\mathrm{TC}(x)|<\kappa$, $\therefore$ $y\in H_\kappa$. $\therefore$ $\mathrm{Trans}(H_\kappa)$. したがって $H_\kappa\models(\mathrm{I})\wedge(\mathrm{V})\wedge(\mathrm{VIII})$. $H_\kappa\cap\mathrm{OR}=\kappa$ なるゆえ $\kappa>\omega$ だから $\omega\in H_\kappa$, $\therefore$ $H_\kappa\models(\mathrm{VI})$. $x, y\in H_\kappa\to\{x, y\}\in H_\kappa$, $x\in H_\kappa\to\bigcup x\in H_\kappa$ であるから $H_\kappa\models(\mathrm{II})\wedge(\mathrm{III})$. (VII)を証明するために

$$(*)\qquad x\in H_\kappa\leftrightarrow x\subset H_\kappa\wedge|x|<\kappa$$

を示そう．(→)は明白．(←)：$x\subset H_\kappa\wedge|x|<\kappa$ とする．$\mathrm{TC}(x)=x\cup\bigcup\{\mathrm{TC}(y)|y\in x\}$ で $|\mathrm{TC}(y)|<\kappa$ なるゆえ $\mathrm{TC}(x)$ は濃度が $<\kappa$ なる集合たち ν 個 (ただし $\nu<\kappa$) の和に等しい．よってその濃度は κ の正則性により，κ より小さい．$\therefore$ $|\mathrm{TC}(x)|<\kappa$, i.e. $x\in H_\kappa$. これで(*)が証明された．さて，任意の $f: x\longrightarrow H_\kappa$ をとる．$\mathrm{Rng}(f)\subset H_\kappa$ で $|\mathrm{Rng}(f)|\leq|x|<\kappa$ であるから (*) により $\mathrm{Rng}(f)\in H_\kappa$. よって **5.4.1** (vii) により $H_\kappa\models(\mathrm{VII})$.

2) $\omega\in HC$. しかし $\mathrm{TC}(\mathscr{P}(\omega))$ は非可算であるから $\mathscr{P}(\omega)\notin HC$. ゆえに $\langle HC, \in\rangle\not\models(\mathrm{IV})$.

6. $\lambda\in\mathrm{Lim}$ とし $\kappa=\beth_\kappa$ とおく．任意に $x\in H_\kappa$ をとる．よって $|\mathrm{TC}(x)|<\kappa$. 仮定により $|\mathrm{TC}(x)|<\beth_\alpha$ なる $\alpha<\lambda$ がある．もちろん $|x|<\beth_\alpha$. $\mathrm{TC}(\mathscr{P}(x))=\mathscr{P}(x)\cup\bigcup\{\mathrm{TC}(y)|y\subseteq x\}$. $y\subseteq x\to|\mathrm{TC}(y)|<\beth_\alpha$, したがって $|\mathscr{P}(x)|<\beth_{\alpha+1}$. よって $\mathrm{TC}(\mathscr{P}(x))$ は濃度が高々 $\beth_{\alpha+1}$ なる集合たち $|x|$ 個の和である．その濃度は $\beth_{\alpha+1}$.

$|x| < \beth_{\alpha+1} \cdot \beth_\alpha = \beth_{\alpha+1} < \kappa$ を超えない：$|\mathrm{TC}(\mathcal{P}(x))| < \kappa$. ∴ $\mathcal{P}(x) \in H_\kappa$. これは $H_\kappa \models$(IV) を意味する.

7. φ を Δ_1^{ZF} とする. $\varphi(x, y)$ が成り立つとしよう. $u = \mathrm{TC}(x) \cup \mathrm{TC}(y) \cup \{x\} \cup \{y\}$ とおくと Trans(u). **5.3.7** により $\langle u, \in \rangle \models \varphi(x, y)$. したがって $\langle u, \in \rangle \models \exists x \varphi(x, y)$. レーヴェンハイム・スコーレム定理(AC が必要)によって $\exists u^* \subseteq u$: $\mathrm{TC}(y) \cup \{y\} \subseteq u^* \wedge |u^*| \leq \mathrm{Max}(\aleph_0, |\mathrm{TC}(y)|) \wedge \langle u^*, \in \rangle \prec \langle u, \in \rangle$. よって $\langle u^*, \in \rangle \models \exists x \varphi(x, y) \wedge$(I). モストウスキー同型定理により, つぶし関数 f と推移的集合 w とがあって $\langle u^*, \in \rangle \cong^f \langle w, \in \rangle$. ゆえに $\langle w, \in \rangle \models \exists x \varphi(x, y)$ (**5.1.8** により $y \in w$ である.) したがってある $x' \in w$ に対し $\langle w, \in \rangle \models \varphi(x', y)$. φ は Δ_1^{ZF} なるゆえ実宇宙 V で $\varphi(x', y)$ が成り立つ. $|\mathrm{TC}(x')| \leq |w| \leq |u^*| \leq \mathrm{Max}(\aleph_0, |\mathrm{TC}(y)|)$ であるから, これは ZFC $\vdash \exists x \varphi(x, y) \to \exists x' [|\mathrm{TC}(x')| \leq \mathrm{Max}(\aleph_0, |\mathrm{TC}(y)|) \wedge \varphi(x', y)]$ を証明した.

8. $\kappa \in \mathrm{Inac}$ とする. $\rho(x) < \kappa \leftrightarrow |\mathrm{TC}(x)| < \kappa$ である. [∵ 演習問題 IV の 10 により $|\rho(x)| \leq |\mathrm{TC}(x)|$ であるから $|\mathrm{TC}(x)| < \kappa \to |\rho(x)| < \kappa$. 逆に $\rho(x) < \kappa$ なら $|\mathrm{TC}(x)| \leq |V_{\rho(x)}| < |V_{\rho(x)+1}| \leq |V_\kappa| = \kappa$. 最後の等式は $\kappa \in \mathrm{Inac}$ だからである. よって $\rho(x) < \kappa \to |\mathrm{TC}(x)| < \kappa$.] さて φ を Σ_2^{ZF}–文としよう. $\neg\varphi \leftrightarrow \forall y \exists x \psi(x, y)$, $\psi \in \Delta_1^{\mathrm{ZF}}$ と表わせる. 7 番により (*): $\exists x \psi(x, y) \to \exists x[|\mathrm{TC}(x)| \leq \mathrm{Max}(\aleph_0, |\mathrm{TC}(y)|) \wedge \psi(x, y)]$ なることがいえる. $y \in V_\kappa$ なら $\rho(y) < \kappa$, したがって $|\mathrm{TC}(y)| < \kappa$. ゆえに (*)の右辺の $|\mathrm{TC}(x)| < \kappa$. したがって $\rho(x) < \kappa$, すなわち $x \in V_\kappa$. ゆえに $y \in V_\kappa$ なる条件の下で $\exists x \psi(x, y) \to (\exists x \psi(x, y))^{V_\kappa}$. よって $\forall y$ を先頭において $\forall y \exists x \psi(x, y) \to \forall y (\exists x \psi(x, y))^{V_\kappa} \to (\forall y \exists x \psi(x, y))^{V_\kappa}$. 対偶をとると $\varphi^{V_\kappa} \to \varphi$.

9. $\alpha = 0$ なら自明. $\alpha > 0$ とする. $a \in V_\alpha$ なら $a \in \mathcal{P}(V_\beta)$ なる $\beta < \alpha$ がある. そこで $x \subseteq a$ とする. よって $x \subseteq V_\beta$, したがって $x \in V_\alpha$. ゆえに V_α は超推移的である.

第 6 章

6.1 問 1. u が有限集合なら, 任意の $v \subseteq u$ は $v = \{a_1, \cdots, a_n\}$ とかける. v は $\varphi(x, a_1, \cdots, a_n) \equiv x = a_1 \vee \cdots \vee x = a_n$ によって u で $a_1, \cdots, a_n$ から定義される. よって $v \in \mathrm{Def}(u)$. ∴ $\mathcal{P}(u) \subseteq \mathrm{Def}(u)$.

問 2. $n \in \omega$ とする. V_n が有限集合なら, $|V_n| = m \in \omega$ とすると $|V_{n+1}| = |\mathcal{P}(V_n)| = 2^m \in \omega$ であるから V_{n+1} は有限集合.

問 3. $\alpha \in L_{\alpha+1}$ であるから $\mathrm{Od}`\alpha \leq \alpha + 1$. 一方, **6.1.9** により $\mathrm{Od}`\alpha \geq \rho(\alpha) + 1 = \alpha + 1$. ∴ $\mathrm{Od}`\alpha = \alpha + 1$.

6.3 問 3. $x = L_\alpha$, $x \in L_\alpha$ は Δ_1^{ZF} であるから, $<\!\!\!\cdot_\alpha$ は Δ_1^{ZF}–論理式上の超限帰納的定義によって得られる. よってそれは Δ_1^{ZF} である. そのとき $x <\!\!\!\cdot\, y \leftrightarrow \exists \alpha \exists \beta [\alpha \leq \beta \wedge x \in L_\alpha \wedge y \in L_\beta \wedge x <\!\!\!\cdot_\beta y]$. ゆえに $<\!\!\!\cdot$ は Σ_1^{ZF} である.

6.5 問 1. φ の構成についての帰納法による. $\alpha_0 = \mathrm{Index}(u)$ とすると $L_{\alpha_0} \cap u = L^u = L_{\alpha_0}$. $\psi(x)$ について $x \in L \cap u \to (\psi(x)^L)^u = (\psi(x))^{L^u}$ が成り立つとし $\varphi = \exists x \psi(x)$ とする. $(\varphi^L)^u \leftrightarrow (\exists \alpha \exists x \in L_\alpha\, \psi^L(x))^u \leftrightarrow \exists \alpha \in u \exists x \in L_\alpha \cap u (\psi^L(x))^u \leftrightarrow$
$\exists x \in L_{\alpha_0} (\psi(x))^{L^u} \leftrightarrow (\exists x\, \psi(x))^{L^u}$.

問 2. Trans(u) なるゆえ $u \cap \mathrm{OR} = \alpha_0$. u は可算. よって α_0 は可算.

6.7 問 1. u を与えられた集合とする. 任意の $\alpha \in \mathrm{OR}$ に対し $\mathrm{ZF} \vdash \exists y (y = L_\alpha[u])$

であるから，α，$u\in L(u)$ に注意して，$(\exists y(y=L_\alpha[u]))^{L(u)}$ が成り立つことがわかる．すなわち $\exists y\in L(u)(y=L_\alpha[u])^{L(u)}$．$y=L_\alpha[u]$ は(α, y, u について) Δ_1^{ZF} であるから ZF-絶対的，したがって $\exists y\in L(u)(y=L_\alpha[u])$ すなわち $L_\alpha[u]\in L(u)$ である．$\therefore$ $L[u]\subseteq L(u)$．

6.8 **問 1.** $\eta\geq\eta_0$ とし任意に $z\subseteq L_{\aleph_\eta}[u]$ なる z をとる．$L_{\aleph_\eta}[u]\cup\{z\}\subseteq V_{\beta_0}$ なる β_0 がある ($\beta_0=\aleph_{\eta+1}$ でよい)．反映定理により $\beta>\beta_0$ なる V_β で $L_{\aleph_\eta}[u]\cup\{z\}\subseteq V_\beta$ (したがって(3)(p. 188)により $u\in V_\beta$)，$\forall x\in V_\beta((x\in L[u])^{V_\beta}\leftrightarrow x\in L[u])$ なるものが存在する．仮定(1)(p. 188)により $x\in L[u]$．よって $(*)$ $\forall x\in V_\beta(x\in L[u])^{V_\beta}$ となる．**6.8.1** (iii) により $|L_{\aleph_\eta}[u]\cup\{z\}|=\aleph_\eta$．$\langle V_\beta, \in\rangle$ と V_β の部分集合 $L_{\aleph_\eta}[u]\cup\{z\}$ とに対しレーヴェンハイム・スコーレム定理を適用すると ($\stackrel{*}{*}$) $\langle y, \in\rangle\prec\langle V_\beta, \in\rangle$，(♯) $|y|=\aleph_\eta\wedge L_{\aleph_\eta}[u]\cup\{z\}\subseteq y$ (したがって $u\in y$)なる y が存在する．$(*)$，($\stackrel{*}{*}$)，(♯)により (♯♯) $\forall x\in y(x\in L[u])^y$．モストウスキー同型定理により $\mathrm{Trans}(v)$，$f: y\longrightarrow v$ ($\in$-同型)なる v ($=f``y$) とつぶし関数 f とがある．(♯)により $|v|=\aleph_\eta$．$L_{\aleph_\eta}[u]$ は y の推移的部分集合であるから **5.1.8** によって $x\in L_{\aleph_\eta}[u]\to f`x=x$．(特に $f`u=u$.) $z\subseteq L_{\aleph_\eta}[u]$ なるゆえ $f`z=\{f`x|x\in z\}=\{x|x\in z\}=z$．したがって $z\in v$．他方，(♯♯)から $\forall x\in v(x\in L[u])^v$，したがって $\forall x\in v\exists\gamma\in v(x\in L_\gamma[u])^v$．$x\in L_\gamma[u]$ は絶対的であるから結局 $\forall x\in v\exists\gamma\in v(x\in L_\gamma[u])$．特に $z\in L_\gamma[u]$ なる $\gamma\in v$ がある．$\gamma\subseteq v$ なるゆえ，$|\gamma|\leq|v|=\aleph_\eta$．したがって $\gamma<\aleph_{\eta+1}$．よって $z\in L_\gamma[u]\subseteq L_{\aleph_{\eta+1}}[u]$．これは(4)(p. 188)を証明した．

6.9 **問 1.** $0\in\mathrm{HOD}$ は明白．$\beta<\alpha\to\beta\in\mathrm{HOD}$ とせよ．よって $\alpha\subseteq\mathrm{HOD}\subseteq\mathrm{OD}$．$\mathrm{TC}(\alpha)=\alpha\in\mathrm{OD}$．$\therefore$ $\alpha\in\mathrm{HOD}$．

問 2. $a, b\in\mathrm{OD}$ とする．$a=\{t|\varphi(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_k)\}$，$b=\{t|\psi(t, \beta_1, \cdots, \beta_m)\}$ とすれば，$\{a, b\}=\{x|x=a\vee x=b\}=\{x|\forall t(t\in x\leftrightarrow\varphi(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_k))\vee\forall t(t\in x\leftrightarrow\psi(t, \beta_1, \cdots, \beta_m))\}$．$\therefore$ $\{a, b\}\in\mathrm{OD}$．

問 3. $a\in\mathrm{OD}$ なら $a=\{t|\varphi(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_k)\}$ とすると，$\bigcup a=\{x|\exists t[\varphi(t, \alpha_1, \cdots, \alpha_k)\wedge x\in t]\}$ であるから，$\bigcup a\in\mathrm{OD}$．

演習問題 VI

1. L_{ξ_0} を ZF の最小モデルとする．もし $\langle L_{\xi_0}, \in\rangle\models\mathrm{SM}$ ならば，$u\in L_{\xi_0}$，$\langle u, \in\rangle\models\mathrm{ZF}$ なる推移的集合 u がある．L_{ξ_0} の中でモストウスキー同型定理を適用すると，$v\in L_{\xi_0}$，$\mathrm{Trans}(v)$，$\langle v, \in\rangle\models\mathrm{ZF}$ なる v の存在がいえる．L_{ξ_0} の最小性から $v=L_{\xi_0}$ でなければならない．不合理．

2. 仮定により $\mathrm{Trans}(u)$，$a\in u$，$\langle u, \in\rangle\models\mathrm{ZF}$ なる u がある．$\alpha_0=\mathrm{Index}(u)$ とおけば，$L_{\alpha_0}(a)$ は a を含む ZF の推移モデルである．そこで $\langle L_\eta(a), \in\rangle\models\mathrm{ZF}$ なる最小の順序数 η をとって η_0 とする．そのとき $\langle L_{\eta_0}(a), \in\rangle\in\mathrm{ZF}$，$a\in L_{\eta_0}(a)$ である．よって $L_{\eta_0}(a)$ は所要のものである．

3. 1) **6.6.4** (ii)と **6.7** 問 1 により $L[u]=L[u\cap L[u]]\subseteq L(u\cap L[u])$ である．**6.6.4** (iii)により $u\cap L[u]\in \mathrm{L}[u]$．これと $L_\alpha(u)$ の ZF-絶対性から $L(u\cap L[u])\subseteq L[u]$ が得られる．[$\because$ $\mathrm{ZF}\vdash\exists y(y=L_\alpha(u\cap L[u]))$ と $L[u]\models\mathrm{ZF}$ より $\exists y\in L[u](y=L_\alpha(u\cap L[u]))$．$\therefore$ $L_\alpha(u\cap L[u])\in L[u]$.] ゆえに $L[u]=L(u\cap L[u])$．

2) $u\subset L$ とする．$L\subseteq L[u]$ であるから $u=L\cap u\subseteq u\cap L[u]$．また $L\cap u=u\supseteq u\cap L[u]$，$\therefore$ $u=u\cap L[u]$．したがって 1)から $L[u]=L(u)$．後半は $\omega\subset L$ による．

4. $\varphi(\alpha)\equiv\neg\exists x\in\mathscr{P}(\omega)[x\in L_{\alpha+1}-L_\alpha]$ とおく．**6.4.1** の証明中の(3)(p. 178)により $L\cap\mathscr{P}(\omega)\subseteq L_{\aleph_1}$ が成り立つ．(実は $L\cap\mathscr{P}(\omega)\subseteq L_{\aleph_1{}^L}$ がいえる．ここに $\aleph_1{}^L$ は L における最小の非可算順序数である．)よってαとして順序数 $\aleph_1$ をとることにより $\langle L,\in\rangle\vDash\exists\alpha\varphi(\alpha)$ が成り立つ．したがって $\langle M,\in\rangle\vDash\exists\alpha\varphi(\alpha)$，すなわち $\alpha\in M$，(＊) $\langle M,\in\rangle\vDash\varphi(\alpha)$ なるαがある．M が可算推移モデルであることからαは可算順序数である．そこでもしも $x_0\in\mathscr{P}(\omega)\wedge x_0\in L_{\alpha+1}-L_\alpha$ なる x_0 が存在するとすれば(L_β の ZF-絶対性により) $L_{\alpha+1}-L_\alpha\in M$ であるから $x_0\in M$ となり(＊)に反する．よって実宇宙で $\neg\exists x\in\mathscr{P}(\omega)[x\in L_{\alpha+1}-L_\alpha]$ が成立する．

5. 1) $\nu<cf(\kappa)$ とし，各 $\xi<\nu$ に対し u_ξ はκで非定常な集合たちとする．また $u=\bigcup\{u_\xi|\xi<\nu\}$ とおく．したがって club in κ なる集合 v_ξ ($\xi<\nu$) が存在して $u_\xi\cap v_\xi=\phi$ となる．そのとき $u\cap\bigcap\{v_\xi|\xi<\nu\}\subseteq\bigcup\{u_\xi\cap v_\xi|\xi<\nu\}=\phi$．ところで演習問題 IV 11 の 4)の証明により $\bigcap_{\xi<\nu}v_\xi$ は club in κ である．よって u は club in κ なる，ある集合と交わらないことになる．これはuがκで非定常であることを意味する．

2) $u=\{\gamma<\kappa|cf(\gamma)=\lambda\}$ とおく．v を任意の club in κ なる集合とする．v のλ番目の元γが存在する．$cf(\gamma)\leq\lambda$ である．λは正則なるゆえ $cf(\gamma)=\lambda$ でなければならない．$\therefore\ \gamma\in u\cap v$.

6. $\langle u_\alpha, v_\alpha\rangle$ を u_α, $v_\alpha\subseteq\alpha$, v_α は club in α かつ $\neg\exists\xi\in v_\alpha(u_\alpha\cap\xi=u_\xi)$ が成り立つような対とする．またかかる対がないαに対しては $\langle u_\alpha, v_\alpha\rangle=\langle 0, 0\rangle$ とする．$\langle v_\alpha|\alpha<\omega_1\rangle$ は $\diamondsuit$-列である．

7. $\langle u_\alpha\subseteq\alpha|\alpha<\omega_1\rangle$ を $\diamondsuit$-列とする．各 $v\subseteq\omega$ に対し $\{\alpha<\omega_1|v\cap\alpha=u_\alpha\}$ は定常であるからもちろん $\alpha>\omega\wedge v\cap\alpha=u_\alpha$ なるαが存在する．これに対し $v\subseteq\omega\subset\alpha$ なるゆえ $v=u_\alpha$. よって $\forall v\subseteq\omega\exists\alpha>\omega[v=u_\alpha]$ が結論される．したがって $\{u_\alpha|u_\alpha\subseteq\omega\}=\mathscr{P}(\omega)$ が成り立つ．これは $|\mathscr{P}(\omega)|=\aleph_1$ を意味する．$\therefore\ 2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

8. $\langle L_\kappa,\in\rangle\vDash(\Delta_0$-分出公理$)\wedge(\Delta_0$-収集公理) を証明すればよい．簡単のため $\psi(x)$ は x のみを自由変数にもつとする．$\langle L_\kappa,\in\rangle\vDash\forall a\exists y\forall x[x\in y\leftrightarrow x\in a\wedge\psi(x)]$ を証明する．ここにψは Δ_0-論理式である．$a\in L_\kappa$ に対し $u=\{x|\langle L_\kappa,\in\rangle\vDash x\in a\wedge\psi(x)\}$ とおく．$u\in L_\kappa$ を示せばよい．$\mathrm{Od}`a=\alpha+1$ $(<\kappa)$ とおく．$\langle L_\kappa,\in\rangle\vDash x\in a\wedge\psi(x)$ とする．$\psi(x)$ は Δ_0 だから $\psi(x)$ に現われる束縛変数は $\mathrm{TC}(a)$ または $\mathrm{TC}(x)$ の要素に属する．よってそれらはすべて $L_{\alpha+1}$ に属すると制限できる．すなわち $\langle L_\kappa,\in\rangle\vDash x\in a\wedge\psi(x)\Longleftrightarrow\langle L_{\alpha+1},\in\rangle\vDash x\in a\wedge\psi(x)$. よって $u\in L_{\alpha+2}\subset L_\kappa$. よって Δ_0-分出公理が成り立つ．Δ_0-収集公理を証明するために，$\varphi(x, y)$ は Δ_0-論理式で x, y のみを自由変数にもつとする．$a\in L_\kappa$ とし $\mathrm{Od}`a=\alpha+1$ $(<\kappa)$ とおく．$\langle L_\kappa,\in\rangle\vDash\forall x\in a\exists y\varphi(x, y)$ とせよ．各 $x\in a$ に対し $\gamma_x=\min\{\mathrm{Od}`y|y\in L_\kappa\wedge(\varphi(x, y))^{L_\kappa}\}$ とおくと，$\gamma_x<\kappa$. $\gamma=\sup\{\gamma_x|x\in a\}<\kappa$ である．なぜなら $x\in a$ なる x の個数は $|L_{\alpha+1}|=|\alpha|$ を超えない．γはκより小さい順序数たち $|\alpha|$ 個未満の sup であるから$\gamma<\kappa$ (κの正則性による)．これに対し $\forall x\in a\exists y\in L_\gamma(\varphi(x, y))^{L_\kappa}$. よって公理の w として L_γ をとればよい．

第 7 章

7.2 問 1. (i) 任意に $p\in P$ をとる．D は P-稠密だから $q\in D$, $q\leq p$ なる q がある．これは $[p]\cap D\neq\phi$ を意味する．よって $p\in D$ の閉包．すなわち $P\subseteq D$ の閉

包. (ii) u_i ($i\in I$) を P の開集合とし $v=\bigcap_{i\in I} u_i$ とおく. 各 u_i は $u_i=\bigcup_{j\in J_i}[p_j{}^{(i)}]$ という形をもつから $q\in v$ とすれば, 各 $i\in I$ について $q\in[p_{j_i}{}^{(i)}]$ となる $j_i\in J_i$ がある. よって $[q]\subseteq[p_{j_i}{}^{(i)}]$. これは $[q]\subseteq v$ を意味する. ゆえに v は開集合である.

問 2. $f=\bigcup G$. $i\in 2$ に対し $D_i=\{p\in P|i\in \mathrm{Rng}(f)\}$ とおくと, D_i は P-稠密である. [$\because$ $n\notin \mathrm{Dom}(q)$ なる n をとり $p=q\cup\{\langle n, i\rangle\}$ をつくれば, $p\leq q\wedge p\in D_i$.]. $p\in G\cap D_i$ をとると $p\subseteq f$. $i\in \mathrm{Rng}(p)$ だから $i\in\mathrm{Rng}(f)$. $\therefore$ $\{n|f`n=1\}\neq\phi$ かつ $\{n|f`n=1\}\neq\omega$.

7.3 問 1. 定義から直ちにわかる.

問 2. 1) $p\Vdash\check{0}=\check{0}$, $\langle\check{0}, 1\rangle\in\{0\}^\vee$, $p\leq 1\in G$ であるから $p\Vdash\check{0}\in\{0\}^\vee$.

2) $\langle\check{0}, 1\rangle\in\{0\}^\vee\wedge p\Vdash\neg(\check{0}\in\check{0})$ であるから $\exists c\exists q\geq p[\langle c, q\rangle\in\{0\}^\vee\wedge p\Vdash\neg(c\in\check{0})]$. $\therefore$ $p\Vdash\check{0}\neq\{0\}^\vee$.

問 3. $u=\langle u_1, u_2\rangle$ のとき $u_1=\tau_1(u)$, $u_2=\tau_2(u)$ とおく. K の定義: $\langle u, i\rangle\in K\equiv(i=1\wedge(*))\vee(i=0\wedge\neg(*))$.
ここに $(*)\equiv\exists\langle p, a, b\rangle[\langle p, a, b\rangle=\tau_1(u)\wedge\{\exists c\exists q\geq p[\langle c, q\rangle\in a\wedge\forall r\leq p\forall d\forall s\leq r(\langle d, s\rangle\in b\rightarrow\exists t\leq r[\tau_2(u)`\langle t, c, d\rangle=1]])]\vee\exists c\exists q\geq p[\langle c, q\rangle\in b\wedge\forall r\leq p\forall d\forall s\leq r(\langle d, s\rangle\in a\rightarrow\exists t\leq r[\tau_2(u)`\langle t, c, d\rangle=1])]\}]$. このとき

$$\langle\langle\langle p, a, b\rangle, F\restriction\mathrm{Seg}_R(\langle p, a, b\rangle)\rangle, i\rangle\in K\leftrightarrow(i=1\wedge(*)')\vee(i=0\wedge\neg(*)')$$

となる. ただし$(*)'$ は$(*)$において $\tau_2(u)$ を F でおきかえたものである.

問 4. $\overline{0}=0$, $\overline{\{0\}^\vee}=\{0\}$, $\therefore$ $\overline{0}\in\overline{\{0\}^\vee}$. よって $M[G]\models 0\in\{0\}^\vee$. またどんな x についても $\neg(x\in_G\{0\})$ であるから $\overline{\{0\}}=0$. よって $\overline{0}\notin\overline{\{0\}}$. $\therefore$ $M[G]\not\models 0\in\{0\}$.

問 5. **7.3.6** の 3°)において $\psi\equiv\neg\neg\varphi$ とし **7.3.11** を適用する.

7.5 問 1. $f=\bigcup G$ が $\aleph_0$ 上の関数であることの証明は **7.2.6** のそれと同様. 全射なること: 任意の $\alpha\in\aleph_1{}^M$ をとる. $D=\{p\in P|\alpha\in\mathrm{Rng}(p)\}$ は P-稠密. よって $p\in G\cap D$ なる p がある. そのとき $\alpha\in\mathrm{Rng}(p)\subseteq\mathrm{Rng}(f)$. よって $\mathrm{Rng}(f)=\aleph_1{}^M$.

問 2. **7.2.5** の証明にならう. $D=P-\{p\in P|p\subset f\}$ を用いよ.

7.6 問 1. $u\in w$ とする. $\rho(u)=\alpha$ とすれば, $x\in u\rightarrow x\in V_\alpha$ であるから $u=\{x|V_\alpha\models x\in u\}$.

演習問題 VII

1. $P=H(u, 2)$ とおく. 1) $D\subseteq P$ を全非整合的かつ非可算な集合とする. $D_n=\{p\in D||\mathrm{Dom}(p)|\leq n\}$ とすれば $D=\bigcup_{n\in\omega}D_n$. よって少なくとも一つの D_{n_0} は非可算集合である. q_0 を $\{p\in D_{n_0}|p<q\}$ が非可算であるような q のうち $|\mathrm{Dom}(q)|$ が最大のものとし ($p<q$ は $q\subset p$ の意味であるから, かかる q_0 は存在する), $D'_{n_0}=\{p\in D_{n_0}|p<q_0\}$ とおく. 任意に $p\in D'_{n_0}$ をとり固定する. $q\subset p$ だから $\mathrm{Dom}(p)-\mathrm{Dom}(q_0)=\{a_1, \cdots, a_m\}$ とおく. $r\in D'_{n_0}\wedge r\neq p\rightarrow r<q_0\wedge r|p$ であるから, かかる r に対し $a_i\in\mathrm{Dom}(r)\wedge r`a_i=1-p`a_i$ なる a_i が定まる. よって各 $i=1, 2, \cdots, m$ に対し $D_{n_0}^{(i)}=\{r\in D'_{n_0}|a_i\in\mathrm{Dom}(r)\wedge r`a_i=1-p`a_i\}$ とおけば, $D'_{n_0}=D_{n_0}^{(1)}\cup\cdots\cup D_{n_0}^{(m)}\cup\{p\}$. よって少なくとも一つの $D_{n_0}^{(i)}$ は非可算. そのとき $q_0\cup\{\langle a_i, 1-p`a_i\rangle\}=q_1$ とおくと, $D_{n_0}^{(i)}\subseteq\{r\in D'_{n_0}|r<q_1\}$ であるから, この右辺の集合, したがって $\{r\in D_{n_0}|r<q_1\}$ は非可算集合である. これは, $|\mathrm{Dom}(q_0)|<|\mathrm{Dom}(q_1)|$ だから, q_0 の選び方に反する. よってかかる D は存在しない.

2) $|\mathrm{Dom}(p)|^M<\aleph_0$ となっているから 1) の議論を M の中で展開することができ

る．

2. いくらでも大きいところに $f`n=0$, $f`m=1$ なる n, $m\in\omega$ が存在するからである．

3. $(A_{\aleph_0})$ が成り立つことの証明は，**7.2.4** のそれと同様である．そこで $(A_{2^{\aleph_0}})$ が成立しないことを証明するために，$(A_{2^{\aleph_0}})$ と仮定する．$P=H(\omega, 2)$ とおき，各 $g\in{}^{\omega}2$ に対し $D_g=\{p\in P\mid\exists n\in\mathrm{Dom}(p)[p`n\neq h`n]\}$ をつくる．D_g は P-稠密である．また $E_n=\{p\in P\mid n\in\mathrm{Dom}(p)\}$ とする．E_n も P-稠密である．$\mathscr{D}=\{D_g\mid g\in{}^{\omega}2\}\cup\{E_n\mid n\in\omega\}$ とすれば $|\mathscr{D}|=2^{\aleph_0}$. P は c.c.c. をみたすから，P と $\mathscr{D}$ に $(A_{2^{\aleph_0}})$ を適用すると，$\mathscr{D}$ に関する P-generic フィルター G が存在する．$f=\bigcup G$ とおく．$E_n\cap G\neq\phi$ より $\mathrm{Dom}(f)=\omega$，すなわち $f\in{}^{\omega}2$. 一方，$D_g\cap G\neq\phi$ より $f\neq g$ for all $g\in{}^{\omega}2$. これは不合理．ゆえに $\neg(A_{2^{\aleph_0}})$.

4. 1) ススリン木の非可算部分集合はススリン木であるから，$\neg$(SH) によって与えられたススリン木 P は濃度 $\aleph_1$ であると仮定してよい．$Q=\{p\in P\mid|[p]|>\aleph_0\}$ なる Q をつくる．ツォルンの補題(**3.9**)により $P-Q$ に極大な全非鎖 Z (Z のどの2要素も比較不可能)がある．(全非鎖集合たちを包含関係によって順序づけた順序集合にツォルンの補題を適用せよ．) P はススリン木だから Z は可算集合である．$z\in Z$ ならば $[z]$ は可算．木の性質から $\{p\in P\mid z\leq p\}$ は鎖であり，したがって可算集合．よってある $z\in Z$ と比較可能である P の元たちは高々可算個である．Z の極大性からこれらは $P-Q$ のすべての元を含んでいる．よって $P-Q$ は可算集合．したがって $|Q|=\aleph_1$ でなければならない．ゆえに Q はススリン木である．$q\in Q$ に対し $[q]\cap Q=[q]-(P-Q)$，よって $[q]\cap Q$ は非可算である．

2) $(A_{\aleph_1})\wedge\neg$(SH) と仮定して矛盾を導く．1) によりあのようなススリン木 Q がある．$Q=\{q_\alpha\mid\alpha<\aleph_1\}$ とおく．$Q_\beta=\{q_\alpha\mid\beta\leq\alpha<\aleph_1\}$ とおけば，Q_β は Q-稠密．全非整合的集合は全非鎖である．よって Q は c.c.c. をみたす．$(A_{\aleph_1})$ によって $\{Q_\beta\mid\beta<\aleph_1\}$ に関する Q-generic フィルター G が存在する．Q は木であるから G は鎖であり，したがって可算集合である．しかしいくらでも大きい β $(<\aleph_1)$ に対し $G\cap Q_\beta\neq\phi$ となるから，G は非可算集合である．これは矛盾．

5. 問 1. 補遺の体系で $\mathcal{S}=\{\in, =\}$, $\mathcal{C}=A$ と考える．ただし強制言語では $\wedge$, $\rightarrow$, $\forall$ はそれぞれ $\neg\vee\neg$, $\neg\vee$, $\neg\exists\neg$ の省略記法であるとする．(このような言語上の述語論理では，公理系と推論規則を付録のものよりも節約できる．) さて問1は "$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ が $x_1, \cdots, x_n$ のみを自由変数として含む $\mathscr{F}(A)$ の論理式であるとき，述語論理 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\{\in, =\}, A)$ において $\vdash\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ ならば，すべての $a_1, \cdots, a_n\in A$ について $\|\varphi(a_1, \cdots, a_n)\|=1$ が成り立つ" という形で証明される．

φ が公理 $\psi\rightarrow(\theta\rightarrow\psi)$ すなわち $\neg\psi\vee(\neg\theta\vee\psi)$ であるとき．明らかに $\|\varphi\|=\|\psi\|'\cup(\|\theta\|'\vee\|\psi\|)=1$ である．

φ が公理 $\psi(t)\rightarrow\exists x\,\psi(x)$ すなわち $\neg\psi(t)\vee\exists x\,\psi(x)$ であるとき，簡単のため $\psi(x)$ は x 以外に自由変数を含まないとし，項 t が A の元 a である場合を考える．$\|\psi(a)\rightarrow\exists x\,\psi(x)\|=\bigvee_{b\in A}(\|\psi(a)\|'\cup\|\psi(b)\|=1$.

他の公理については読者の演習にゆだねる．

φ が ψ と $\psi\rightarrow\varphi$ からモーダス・ポーネンスによって導かれるとき．帰納法の仮定により $\|\psi\|=\|\psi\rightarrow\varphi\|=1$. よって $1=\|\psi\|(\|\psi\|'\cup\|\varphi\|)=\|\psi\|\cup\|\varphi\|=\|\varphi\|$. $\therefore$ $\|\varphi\|=1$.

φ が $\exists x\psi(x)\to\theta$ という形で $\vdash\psi(x)\to\theta$ であるとき，ただし θ は x を自由変数として含まないとする．帰納法の仮定により，すべての $a\in A$ に対し $\neg\|\psi(a)\vee\theta\|=1$. よって $1=\bigwedge_{a\in A}\|\ulcorner\psi(a)\vee\theta\|=\left(\bigvee_{a\in A}\|(a)\|\right)'\cup\|\theta\|=\|\exists x\psi(x)\|'\cup\|\theta\|=\|\varphi\|$. もう一つの推論規則についても同様．

問 2. 1°) $\rho(a)$ についての帰納法で，すべての $p\in P$ について $p\Vdash a=a$ であることが証明できる．よって $\|a=a\|=\bigvee B=1$.

2°) $p\Vdash a=b$ の定義の対称性によって，$p\Vdash a=b\leftrightarrow p\Vdash b=a$ が成り立つ．よって $\|a=b\|=\|b=a\|$.

3°) は後回し．4°) は明らか．

5°) $p\Vdash\varphi$ かつ $q\Vdash\neg\varphi$ ならば，$p\cap q=0$ である．[∵ もし $0\neq r=p\cap q$ ならば，$r\leq p$, $r\leq q$ だから，拡大補題(**7.3.8**)により $r\Vdash\varphi$ かつ $r\Vdash\neg\varphi$. これは p. 208 の事実に反する．] よって $\|\varphi\|\cap\|\neg\varphi\|=0\cdots$(イ)．そこで $p\cap\|\varphi\|=0$ なる任意の p をとる．$q\leq p$ なる q に対し，もし $q\Vdash\varphi$ ならば，$q\leq\|\varphi\|$ であるから，$0\neq q\leq p\cap\|\varphi\|=0$ となり不合理．ゆえに $\forall q\leq p\,\mathrm{not}[q\Vdash\varphi]$. これは $p\Vdash\neg\varphi$ を意味する．よって $p\leq\|\neg\varphi\|$. 特に $p=\|\varphi\|'$ ととると $\|\varphi\|'\leq\|\neg\varphi\|$. ∴ $\|\varphi\|\cup\|\neg\varphi\|=1$ これと(イ)から $\|\neg\varphi\|=\|\varphi\|'$.

6°) $p\Vdash\varphi(a)$ なら，$p\Vdash\exists x\varphi(x)$ であるから，$\bigvee_{a\in M}\|\varphi(a)\|\leq\|\exists x\varphi(x)\|\cdots$(ロ)．逆に，$p\Vdash\exists x\varphi(x)$ なら，ある b に対し $p\Vdash\varphi(b)$. よって $p\leq\|\varphi(b)\|\leq\bigvee_{a\in M}\|\varphi(a)\|$. ∴ $\|\exists x\varphi(x)\|=\bigvee\{p\mid\exists a(p\Vdash\varphi(a))\}\leq\bigvee_{a\in M}\|\varphi(a)\|$. これと(ロ)から $\|\exists x\varphi(x)\|=\bigvee_{a\in M}\|\varphi(a)\|$.

3°) $\|\varphi(a)\|\cap\|a=b\|\leq\|\varphi(b)\|$ の証明：$\max\{\rho(a),\rho(b)\}$ についての帰納法による．その帰納法の中でさらに φ の構成についての帰納法を用いる．

(1) $\varphi(a)\equiv a=c$ のとき．まず $\|a\neq c\|\leq\|a\neq b\|\cup\|b\neq c\|\cdots$(ハ)を証明する．ところで(ニ)：$p\Vdash a\neq c$ ならば $\exists r[r\leq p\wedge(r\Vdash a\neq b\text{ or }\Vdash b\neq c)]$ が成り立つ．[∵ $q\geq p$, $\langle d,q\rangle\in a\wedge p\Vdash\neg(d\in c)$ または $\langle d,q\rangle\in c\wedge p\Vdash\neg(d\in a)$ なる d, q がある．第1の場合を考える(第2の場合も同様)．$r\leq p\wedge r\Vdash a\neq b$ なる r が存在しないとしよう(存在すれば(ニ)の結論は OK)．よって $p'\leq p\wedge p\Vdash d\in b$ なる p' がある．(なぜなら，もしなければ，$p\Vdash\neg(d\in b)$ であり，したがって $p\Vdash a\neq b$ となって今の仮定に反する．) ゆえに $q'\geq p'$, $\langle e,q'\rangle\in b$, $p'\Vdash e=d$ なる e, q' がある．帰納法の仮定により代入法則 $\|\neg(d\in c)\|\wedge\|d=e\|\leq\|\neg(e\in c)\|$ が成り立っているから(∵ $\rho(d)$, $\rho(e)<\max\{\rho(a),\rho(b)\}$)，$p'\Vdash\neg(d\in c)$ と $p'\Vdash e=d$ より $p'\Vdash\neg(e\in c)$ i.e. $\exists p'\leq p[p'\Vdash\neg(e\in c)]$. ところで $q'\geq p'$, $\langle e,q'\rangle\in b$, $p'\Vdash\neg(e\in c)$ であるから，$p'\Vdash b\neq c$. ゆえに(ニ)が成り立つ．] さて(ハ)の証明であるが，もし $\|a\neq c\|\nleq\|a\neq b\|\cup\|b\neq c\|$ なら，$q\underset{\mathrm{def}}{=}p\cap\|a=b\|\cap\|b=c\|>0$ なるある p で $p\Vdash a\neq c$ となるものがある．[∵ もし $\forall p[p\Vdash a\neq c\to p\cap\|a=b\|\cap\|b=c\|=0]$ なら，$\bigvee\{p\mid p\Vdash a\neq c\}\cap\|a=b\|\cap\|b=c\|=0$ ∴ $\|a\neq c\|\leq(\|a=b\|\cap\|b=c\|)'=\|a\neq b\|\cup\|b\neq c\|$. これは仮定に反する．] $q\leq p$ だから $q\Vdash a\neq c$. $q\leq\|a=b\|$, $q\leq\|b=c\|$ より $q\Vdash a=b$ かつ $q\Vdash b=c$. この三者は $q=p$ ととって(ニ)に矛盾する．ゆえに(ハ)が成り立たなければならない．(ハ)と5°)から $\|a=b\|\cap\|b=c\|\leq\|a=c\|$ が得られる．

(2) $\varphi(a)\equiv a\in c$ のとき．$\|a\in c\|\cap\|a=b\|\leq\|b\in c\|$ を証明する．$p\Vdash a\in c$, $p\Vdash a=b$ とせよ．$q\geq p$, $\langle d, q\rangle\in c$, $p\Vdash a=d$ なる d, q がある．このとき c として d をとって (1)から $p\Vdash b=d$．［これは次の一般的事実による：$\|\varphi\|\cap\|\psi\|\leq\|\theta\|$ ならば，$p\Vdash\varphi$, $p\Vdash\psi$ なるとき，$p\Vdash\theta$ である．］ よって $\exists d\exists q\geq p[\langle d, q\rangle\in c\wedge p\Vdash b=d]$ が示されたから，$p\Vdash b\in c$． ∴ $\|a\in c\|\cap\|a=b\|\leq\|b\in c\|$．［これは次の一般的事実による．$\forall p\in P[p\Vdash\varphi\wedge p\Vdash\psi\rightarrow p\Vdash\theta]$ ならば $\|\varphi\|\cap\|\psi\|\leq\|\theta\|$.］

(3) $\varphi(a)\equiv c\in a$ のとき，$\|c\in a\|\cap\|a=b\|\leq\|c\in b\|$ を証明する．$p\Vdash c\in a$, $p\Vdash a=b$ とせよ．よって $q\geq p$, $\langle d, q\rangle\in a$, $p\Vdash d=c\cdots$(ホ)なる q, d がある．$p\nVdash a\neq b$ であるから，$p\nVdash\neg(d\in b)$．よって $\exists p'\leq p[p'\Vdash d\in b]\cdots$(ヘ)．(ホ), (ヘ), (2)から $p'\Vdash c\in b$．よって

(ト) $\forall p[p\Vdash c\in a\wedge p\Vdash a=b\rightarrow\exists p'\leq p(p'\Vdash c\in b)]$

なることが示された．いま $\|\neg(c\in b)\|\not\leq\|\neg(c\in a)\|\cup\|\neg(a=b)\|$ と仮定しよう．すると (1) のとき証明したと同様にして，$p\Vdash\neg(c\in b)$, $q\underset{\text{def}}{=}p\cap\|c\in a\|\cap\|a=b\|>0$ なる p があることがわかる． ∴ $q\Vdash\neg(c\in b)$, $q\Vdash c\in a$, $q\Vdash a=b$．後二者から(ト)によって $\exists q'\leq q[q'\Vdash c\in b]$．前者から $q'\Vdash\neg(c\in b)$．これは不合理．よって $\|\neg(c\in b)\|\leq\|\neg(c\in a)\|\cup\|\neg(a=b)\|$ でなければならない． ∴ $\|c\in a\|\cap\|a=b\|\leq\|c\in b\|$．

(4) $\varphi\equiv\psi\vee\theta$ のとき．容易．

(5) $\varphi\equiv\neg\psi$ のとき．帰納法の仮定により $\|\psi(a)\|\cap\|a=b\|\leq\|\psi(b)\|$．もし $\|\psi(b)\|\not\leq\|\psi(a)\|\cup\|\neg(a=b)\|$ ならば，$p\Vdash\psi(b)$, $q\underset{\text{def}}{=}p\cap\|\neg\psi(a)\|\cap\|a=b\|>0$ なる p がある．この q に対し $q\Vdash\psi(b)$, $q\Vdash\neg\psi(a)$, $q\Vdash a=b$．帰納法の仮定(aと bを入れかえてよい)により $q\Vdash\psi(a)$．これは不合理． ∴ $\|\psi(b)\|\leq\|\psi(a)\|\cup\|\neg(a=b)\|$． ∴ $\|\neg\psi(a)\|\cap\|a=b\|\leq\|\neg\psi(b)\|$．

(6) $\varphi(a)\equiv\exists x\psi(a, x)$ のとき．帰納法の仮定は $\forall c\in M[\|\psi(a, c)\|\cap\|a=b\|\leq\|\psi(b, c)\|]$ である．$\|\exists x\psi(a, x)\|\cap\|a=b\|=\left(\bigvee_{c\in M}\|\psi(a, c)\|\right)\cap\|a=b\|=\bigvee_{c\in M}(\|\psi(a, c)\|\cap\|a=b\|)\leq\bigvee_{c\in M}\|\psi(b, c)\|=\|\exists x\psi(b, x)\|$．

補　　遺

多少のページの余裕が生じたので，述語論理の体系を記しておく．

$\mathcal{S}$ を**述語記号**と呼ばれる有限個または無限個の記号 $\mathrm{P}_j^{(i)}$ ($i=0, 1, 2, \cdots$; $j=0, 1, 2, \cdots$) の集合とし，$\mathcal{C}$ を**定数記号**と呼ばれる有限(0 個でもよい)または無限個の記号 c_i ($i=0, 1, 2, \cdots$) の集合とする．

定義 1. 言語 $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ とは次のような記号系と形成規則をもつ体系である．

記号系

1) 論理記号　：$\vee$，$\wedge$，$\rightarrow$，$\neg$

2) 限定作用素：$\exists$，$\forall$

3) 特異記号　：(　,　)

4) 個体定数　：$\mathcal{C}$ に属する定数記号

5) 個体変数　：v_0，v_1，v_2，$\cdots$ (無限個)

6) 述語記号　：$\mathcal{S}$ に属する述語記号．

(関数記号を含める場合もあるが，簡単のためここではそれを入れない．)

形成規則

個体定数と個体変数を**項**という．

論理式は次のように帰納的に定義される：

1) $\mathrm{P}_i^{(0)} \in \mathcal{S}$ ならば，$\mathrm{P}_i^{(0)}$ は論理式である．(特にこれを**命題記号**という．)

2) $\mathrm{t}_1, \cdots, \mathrm{t}_j$ が項で，$\mathrm{P}_i^{(j)} \in \mathcal{S}$ ならば，$\mathrm{P}_i^{(j)}(\mathrm{t}_1, \cdots, \mathrm{t}_j)$ は論理式である．(1), 2)で与えられるものを**原子論理式**という．)

3) φ, ψ が論理式ならば，$(\varphi)\vee(\psi)$，$(\varphi)\wedge(\psi)$，$(\varphi)\rightarrow(\psi)$，$\neg(\varphi)$ は論理式である．

4) x が個体変数で，φ が論理式ならば，$\exists x(\varphi)$，$\forall x(\varphi)$ は論理式である．このとき，x は $\exists$ または $\forall$ によって**束縛**される，x は**束縛変数**であるという．また φ を $\exists x$ または $\forall x$ の**作用域**という．x が束縛されないときは，**自由**であるまたは**自由変数**であるという．これはすべて一つの論理式においていわれることである．x が φ において自由であることを強調するときは $\varphi(x)$ とかく．

5) 以上によって与えられたもののみが論理式である. ▨

上で, t, x, φ などは超記号である. 超記号については本文に説明がある. また論理式を記述する際, カッコを適当に省略したり, ブラケット [,] を使用したりして, みやすくする.

自由変数を含まない論理式を**閉論理式**または**文**という.

定義 2. **第1階述語論理の体系** $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ とは, 言語 $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ をもち, 次の公理系と推論規則をもつ体系のことである.

公理系 次の形の論理式を公理という. φ, ψ, θ は $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$ の論理式を表わす.

1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

2) $(\varphi \to \psi) \to [(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to (\varphi \to \theta)]$

3) $(\varphi \wedge \psi) \to \varphi, \qquad (\varphi \wedge \psi) \to \psi$

4) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

5) $\varphi \to (\varphi \vee \psi), \qquad \psi \to (\varphi \vee \psi)$

6) $(\varphi \to \theta) \to [(\psi \to \theta) \to ((\varphi \vee \psi) \to \theta)]$

7) $(\varphi \to \psi) \to [(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi]$

8) $\neg(\neg\varphi) \to \varphi$

9) $\varphi(\mathrm{t}) \to \exists x \varphi(x)$

10) $\forall x \varphi(x) \to \varphi(\mathrm{t})$

ただし 9), 10) では, $\varphi(\mathrm{t})$ は $\varphi(x)$ において x のすべての自由出現を項 t でおきかえて得られる論理式であり, 項 t は $\varphi(x)$ において x に対し自由な項, すなわち, (イ) t は定数記号か, (ロ) t は x 自身であるか, (ハ) t は x と異なる変数 y であってしかも x が $\varphi(x)$ の中の $\exists y$ や $\forall y$ の作用域に現われないようなものである.

推論規則

1) $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$ (モーダス・ポーネンス——分離規則)

2) $\dfrac{\varphi(x) \to \psi}{\exists x \varphi(x) \to \psi}$ (特殊化)　　3) $\dfrac{\psi \to \varphi(x)}{\psi \to \forall x \varphi(x)}$ (一般化)

ただし 2), 3) では, ψ は x を自由変数として含まないとする. ▨

注意 $\mathcal{S}$ の中に等号記号が含まれる場合は, 等号公理を必要とする.
(この公理系と推論規則はクリーンによるものである.)

人 名 一 覧

Baire, R. (1874-1932)	ベール
Bernays, P. (1888–1978)	ベルナイス
Bernstein, F. (1878–1956)	ベルンシュタイン
Boole, G (1815–1864)	ブール
Borel, E. (1871–1956)	ボレル
Burali–Forti, C. (1861-1931)	ブラリ・フォルチ
Cantor, G. (1845–1918)	カントル
Cohen, P. J. (1934–)	コーヘン
Dedekind, R. (1831–1916)	デデキント
Drake, F. R.	ドレーク
Fraenkel, A. (1891–1965)	フレンケル
Galilei, G. (1564–1642)	ガリレイ
Gauss, C. F. (1777–1855)	ガウス
Gödel, K. (1906–1978)	ゲーデル
Hadamard, J. (1865–1963)	アダマール
Hartogs, F. (1874–1943)	ハルトークス
Heine, H. E. (1821–1881)	ハイネ
Hilbert, D. (1862–1943)	ヒルベルト
Jech, T.	イェック
Kleene, S. C. (1909–)	クリーン
König, D. (1884–1944)	ケーニヒ
König, J. (1849-1913)	ケーニヒ
Kronecker, L. (1823–1891)	クロネッカー
Lebesgue, H. (1875–1941)	ルベーグ
Lévy, A.	レヴィ
Liouville, J. (1809–1882)	リューヴィユ
Löwenheim, L. (1878–1957)	レーヴェンハイム
Mittag–Leffler, G. M. (1846–1927)	ミッタク・レフラー
Mostowski, A. (1913–1975)	モストウスキー
Myhill, J. (1924–)	マイヒル
Oppenheimer, R. (1904–1967)	オッペンハイマー
Peano, G. (1858–1932)	ペアノ
Post, E. L. (1897–1954)	ポスト
Robinson, R. M. (1911–)	ロビンソン
Russell, B. (1872–1970)	ラッセル

Schröder, E. (1841–1902)	シュレーダー
Scott, D.	スコット
Shoenfield, J. R. (1926–)	ショーンフィールド
Silver, J. H. (1941?)	シルヴァー
Skolem, Th. (1887–1963)	スコーレム
Solovay, R. (1938–)	ソロベイ
Souslin, M. J. (1894–1919)	ススリン
Takeuti, G. (1926–)	竹内外史
Von Neumann, J. (1903–1957)	フォン・ノイマン
Weierstrass, K. (1815–1897)	ワイエルシュトラス
Weyl, H. (1885–1955)	ワイル
Zermelo, E. (1871–1956)	ツェルメロ
Zorn, M. (1906–)	ツォルン(ゾーン)

Drake, Jech, Lévy, Scott, Silver 等は1982年現在で大体40才台の人たちである.

記号索引

事項索引

あ 行

か 行

さ 行

た　行

な　行

は　行

ま　行

田中尚夫（たなかひさお）略歴

1962年　東京都立大学大学院修了
1967年　理学博士（名古屋大学）
現　在　法政大学工学部教授

主要著書

ブルバキ集合論 3（共訳，東京図書）
現代数理論理学入門（訳，共立出版）
工科系のための微分積分学（共著，裳華房）

昭和57年10月25日　初版発行

現代数学レクチャーズ B-10
公理的集合論

著者　田中尚夫
発行者　山本健二
発行所　株式会社 培風館
東京都千代田区九段南 4-3-12・郵便番号 102
電話 (03) 262-5256(代表)・振替東京 4-44725

定価 ¥ 3200.

日東紙工印刷・三水舎製本

ISBN4-563-00430-8
C3341 ¥3200E